



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA BASILICATA**  
**Scuola di Ingegneria**



**Corso di**  
***TECNICA DELLE COSTRUZIONI***

**IL TAGLIO NELLE SEZIONI IN C.A.**  
**ANALISI ELASTICA E STATO LIMITE ULTIMO**

Docente:

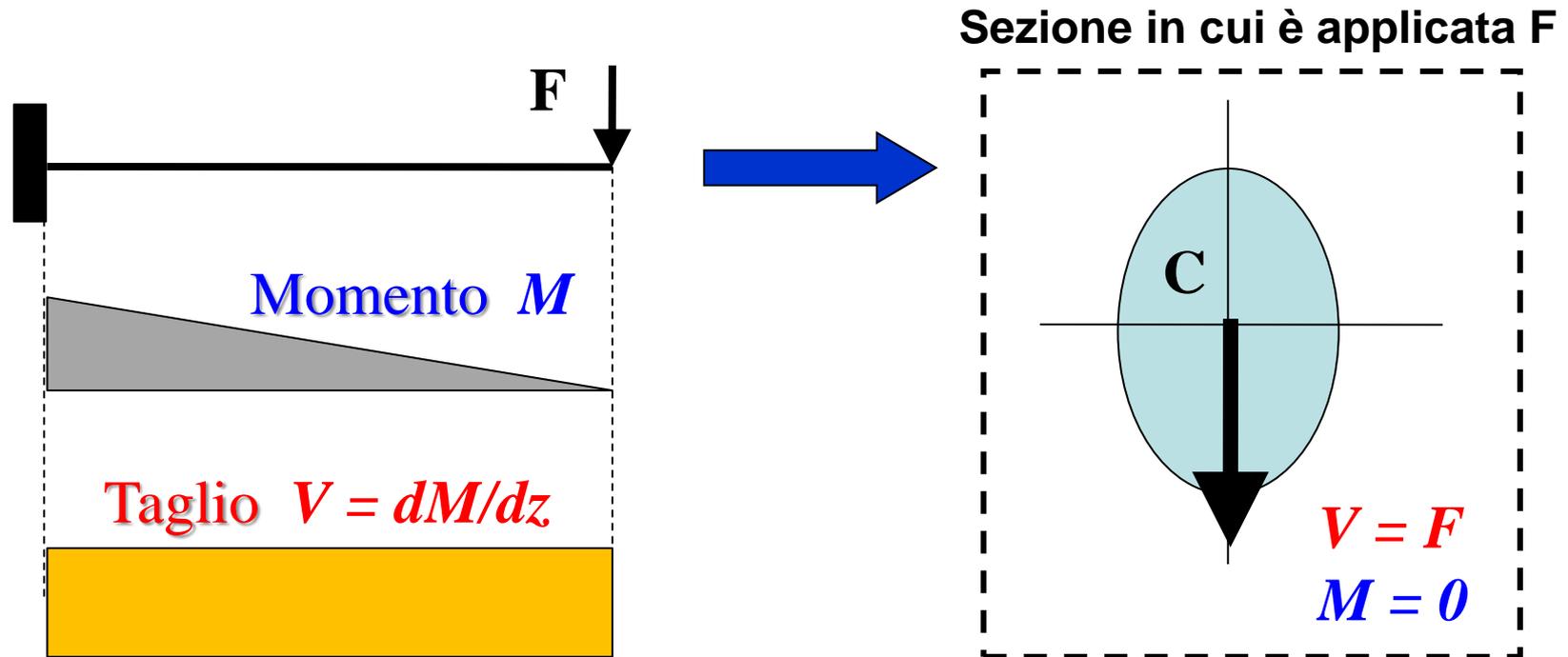
Prof. Ing. Angelo MASI

Collaboratori:

Ing. Vincenzo MANFREDI

Ing. Giuseppe VENTURA

# La sollecitazione di TAGLIO

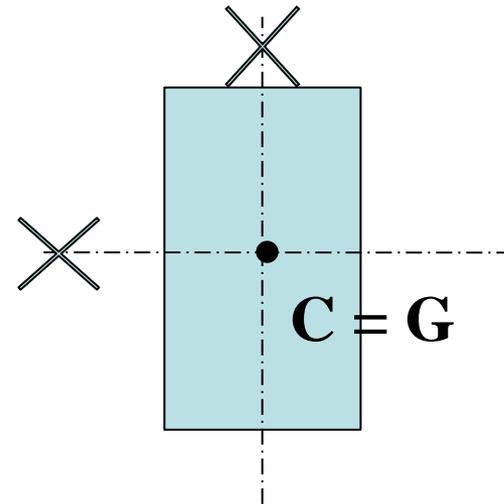
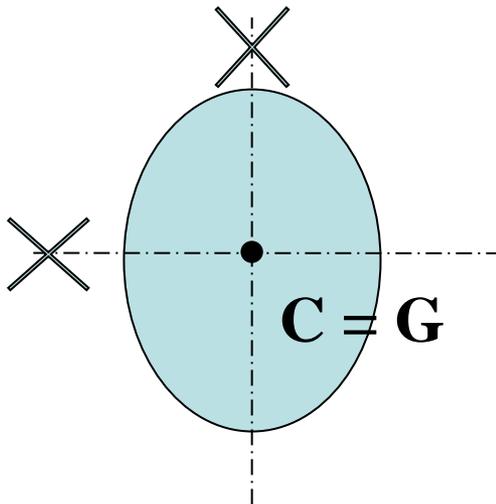


Una sezione di una trave risulta sollecitata a solo taglio  $V$  se, in assenza di momento flettente  $M$ , la risultante delle azioni esterne  $F$  appartiene al piano della sezione e passa per un punto caratteristico **C** detto **CENTRO DI TAGLIO**

# La sollecitazione di TAGLIO

## Posizione del CENTRO DI TAGLIO

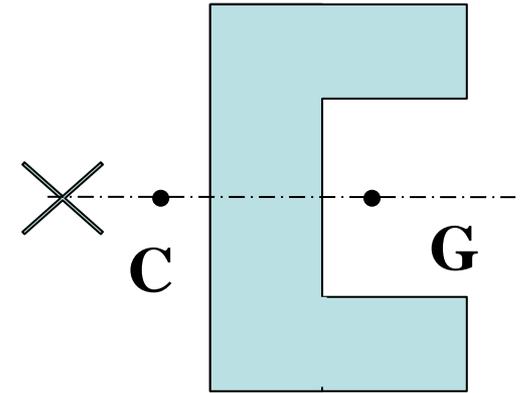
**Regola 1:** se una sezione è dotata di due assi di simmetria il loro punto di incontro è sia il baricentro geometrico G che il **Centro di Taglio C**



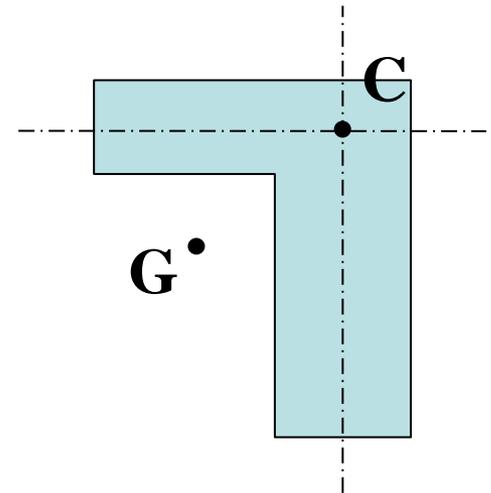
# La sollecitazione di TAGLIO

## Posizione del CENTRO DI TAGLIO

**Regola 2:** se una sezione ha un solo asse di simmetria, su di esso si trovano sia il baricentro  $G$  che il **Centro di Taglio  $C$**  (che non coincide con  $G$ )

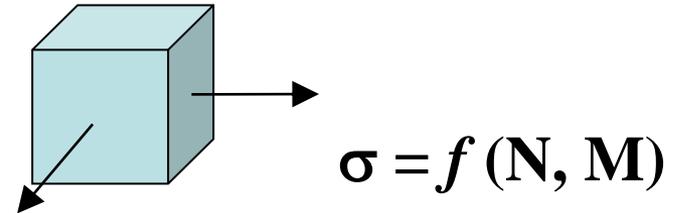


**Regola 3:** se in una sezione esiste un unico punto in cui si incontrano le linee medie delle diverse parti in cui la sezione può essere suddivisa, tale punto è il **Centro di Taglio  $C$**  (che non coincide con  $G$ )

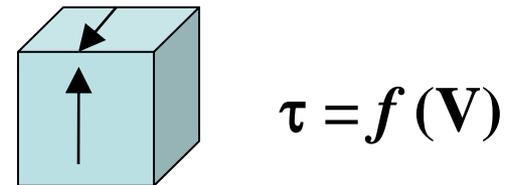


# Le tensioni tangenziali

Alle sollecitazioni sforzo normale  $N$  e momento flettente  $M$  si associano tensioni normali  $\sigma$ , ossia tensioni che agiscono perpendicolarmente al piano cui sono applicate.



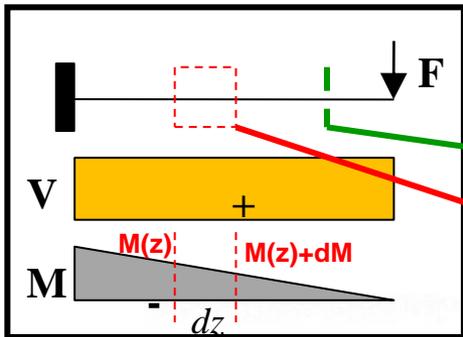
Alla sollecitazione taglio  $V$  si associano tensioni tangenziali  $\tau$ , ossia tensioni che agiscono parallelamente al piano cui sono applicate.



**Ai fini delle verifiche di sicurezza delle sezioni in c.a., gli effetti di  $V$  e di  $(M + N)$  si valutano separatamente.**

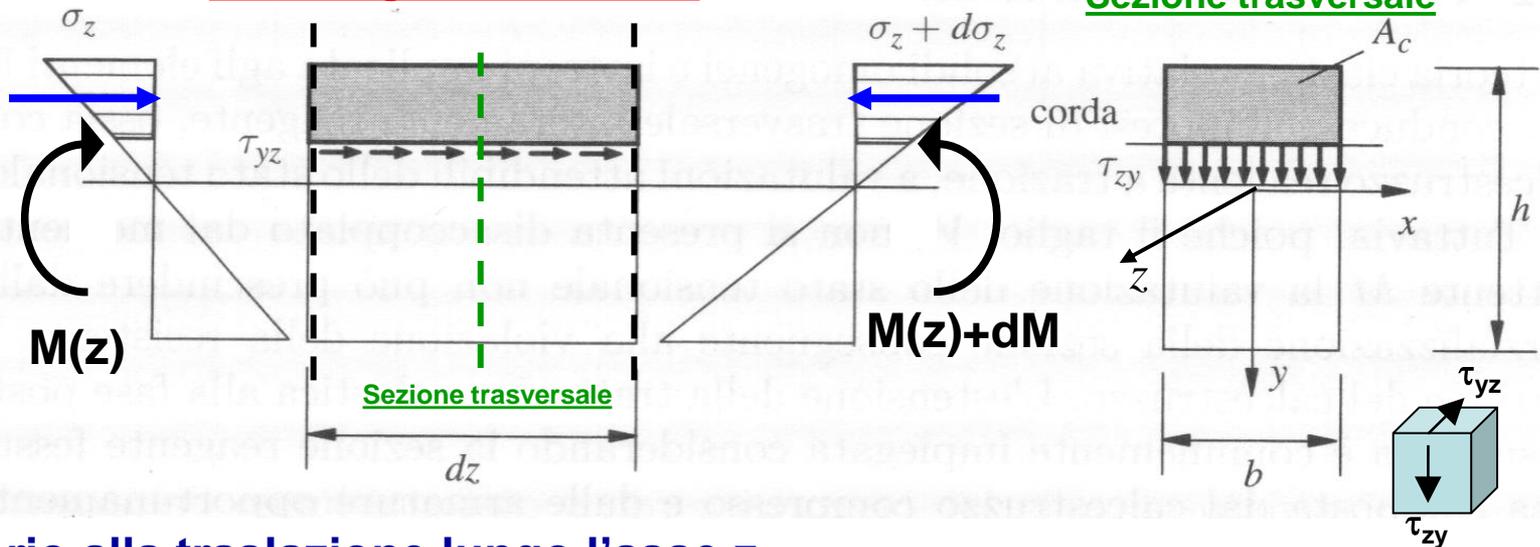
# Le tensioni tangenziali

Le tensioni tangenziali  $\tau$  possono essere determinate a partire dall'equilibrio alla traslazione (lungo l'asse  $z$  delle trave) delle forze agenti sul concio elementare di lunghezza  $dz$ .



Tratto longitudinale di trave

Sezione trasversale



Equilibrio alla traslazione lungo l'asse  $z$

$$\int_{A_c} \sigma_z dA - \int_{A_c} (\sigma_z + d\sigma_z) dA + \tau_{yz} b dz = 0$$

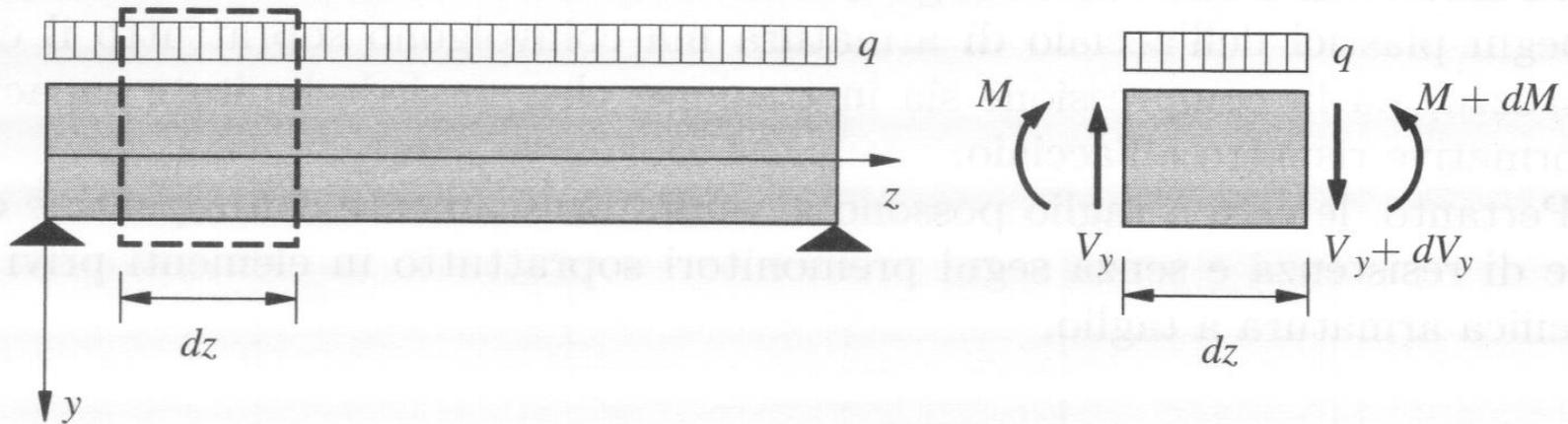


$$\int_{A_c} d\sigma_z dA = \tau_{yz} b dz$$

# Le tensioni tangenziali

Dalla formula di Navier  $\sigma = (M / I) y$ , le tensioni normali  $\sigma_z$  possono essere scritte come:

$$d\sigma_z = \frac{dM}{I_x} y$$



ed inoltre dall'equilibrio alla rotazione del concio elementare:

$$dM = V_y dz$$

# Le tensioni tangenziali. L'espressione di Jourawski

Le tensioni tangenziali  $\tau_{yz}$ , ipotizzando un valore costante lungo la corda c-c (posta a distanza  $y$  dall'asse baricentrico x-x), sono valutate mediante l'espressione di Jourawski:  $\tau_{yz} = (V_y S_x) / (I_x b)$

Ricordando che:

$$dM = V_y dz$$

$$d\sigma_z = \frac{dM}{I_x} y$$



$$d\sigma_z = \frac{V_y dz}{I_x} y$$



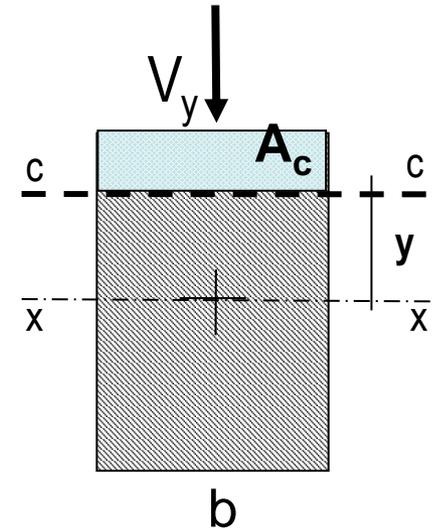
$$\int_{A_c} d\sigma_z dA = \tau_{yz} b dz$$



$$\int_{A_c} \frac{V_y dz}{I_x} y dA = \tau_{yz} b dz$$



$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{V_y}{I_x b} \int_{A_c} y dA = \frac{V_y S_x}{I_x b}$$

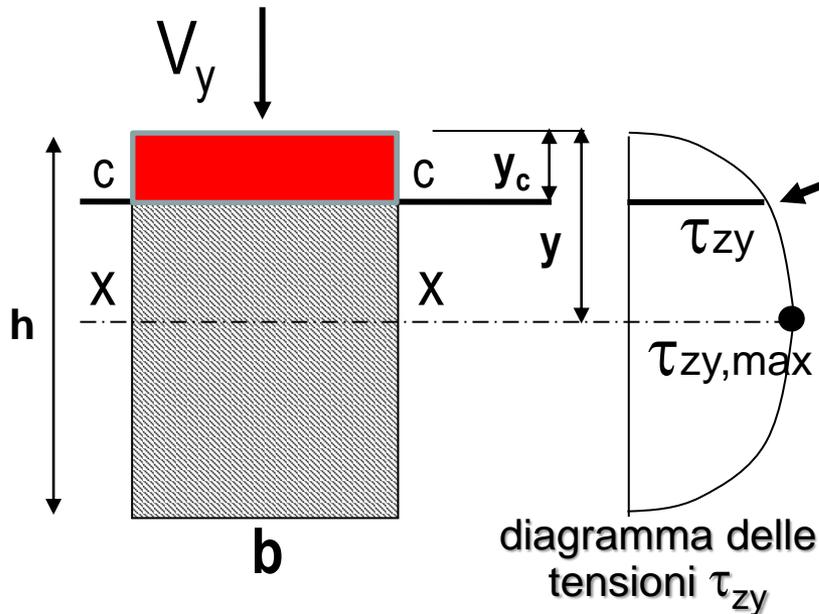


$S_x$  è il momento statico, rispetto all'asse baricentrico x-x, della parte di sezione reagente  $A_c$  al di sopra della corda c-c

$I_x$  è il momento di inerzia della sezione reagente rispetto all'asse baricentrico x-x

# Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

## Distribuzioni delle tensioni tangenziali in una sezione omogenea interamente reagente



$$\tau_{zy} = \frac{V_y}{I_x} \frac{S_x}{b} = k S_x \quad (f(y_c^2)) \quad (\S)$$

$I_x$  è il momento di inerzia della sezione reagente rispetto al suo asse baricentrico x-x:

$$I_x = b h^3 / 12 \rightarrow \text{cost}$$

$S_x$  è il momento statico della parte di sezione reagente al di sopra della corda  $c - c$  in cui si calcola la  $\tau$  :

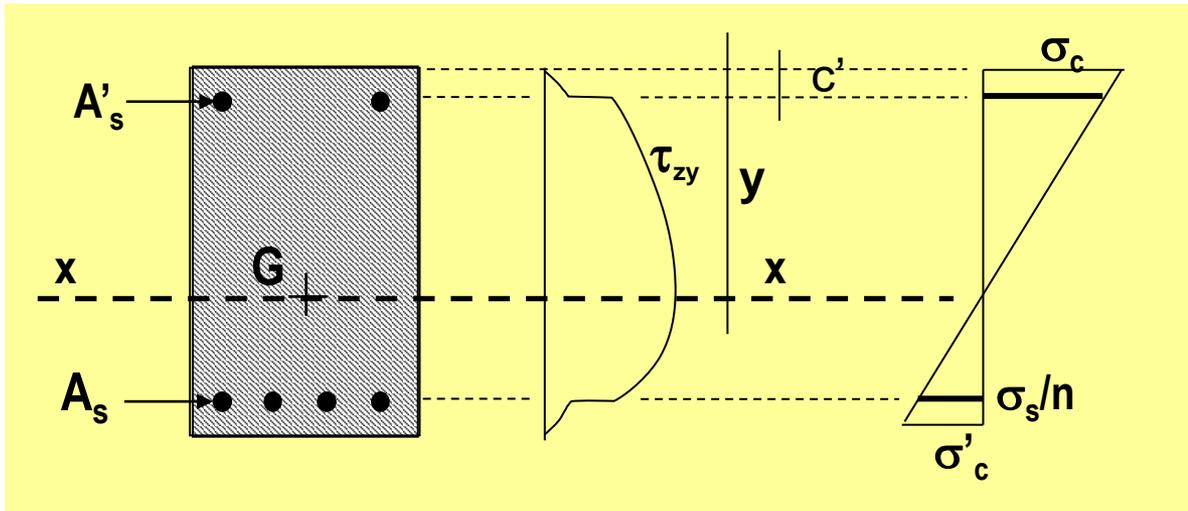
$$S_x(y_c) = b y_c (y - y_c/2) \rightarrow f(y_c^2)$$

$y = h/2$  (distanza del bordo superiore dall'asse baricentrico x-x)

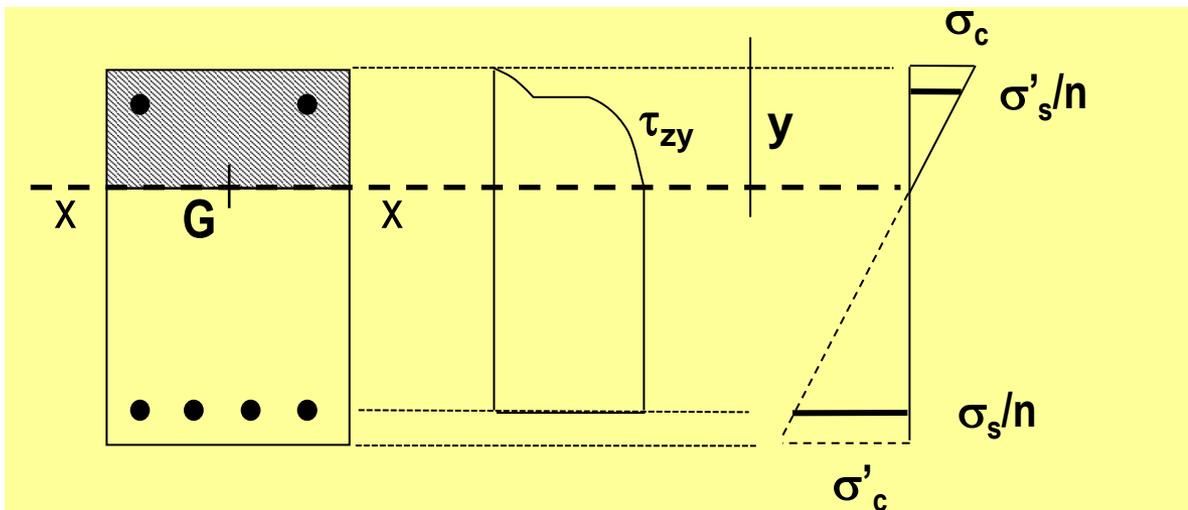
(§) Nelle sezioni rettangolari  $b$  è costante  $\rightarrow$  le tensioni tangenziali  $\tau_{zy}$  hanno andamento parabolico

# Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

Per le sezioni in c.a. bisogna distinguere:



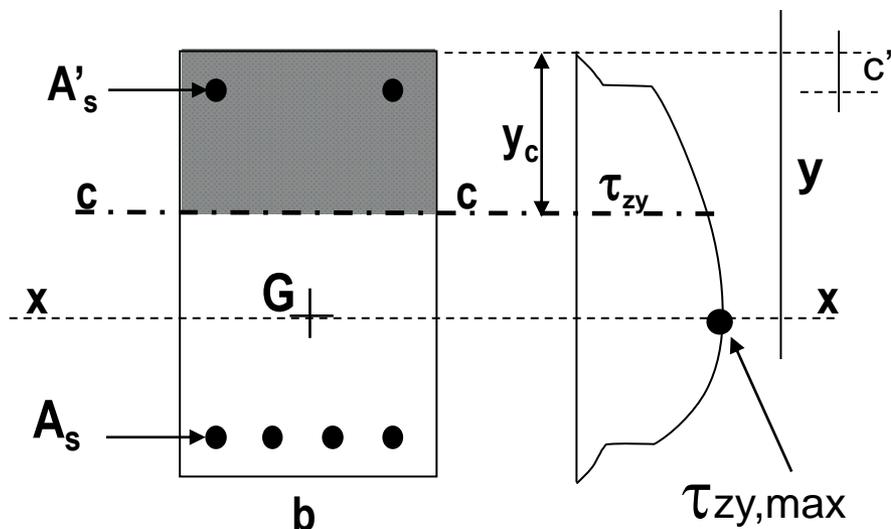
1) sezione interamente reagente (non parzializzata)



2) sezione parzializzata (CLS non reagente a trazione)

## Calcolo elastico delle $\tau$ nel c.a. – Sezione interamente reagente

Distribuzione delle tensioni tangenziali in sezione rettangolare in c.a. con CLS reagente sia a compressione che a trazione (CLS non fessurato)



$$\tau_{zy} = \frac{V_y \cdot S_x}{I_x \cdot b} = k \cdot S_x (f(y_c^2))$$

- $S_x$  è il momento statico rispetto all'asse baricentrico x-x della sezione reagente di una delle parti della sezione separate dalla corda stessa:

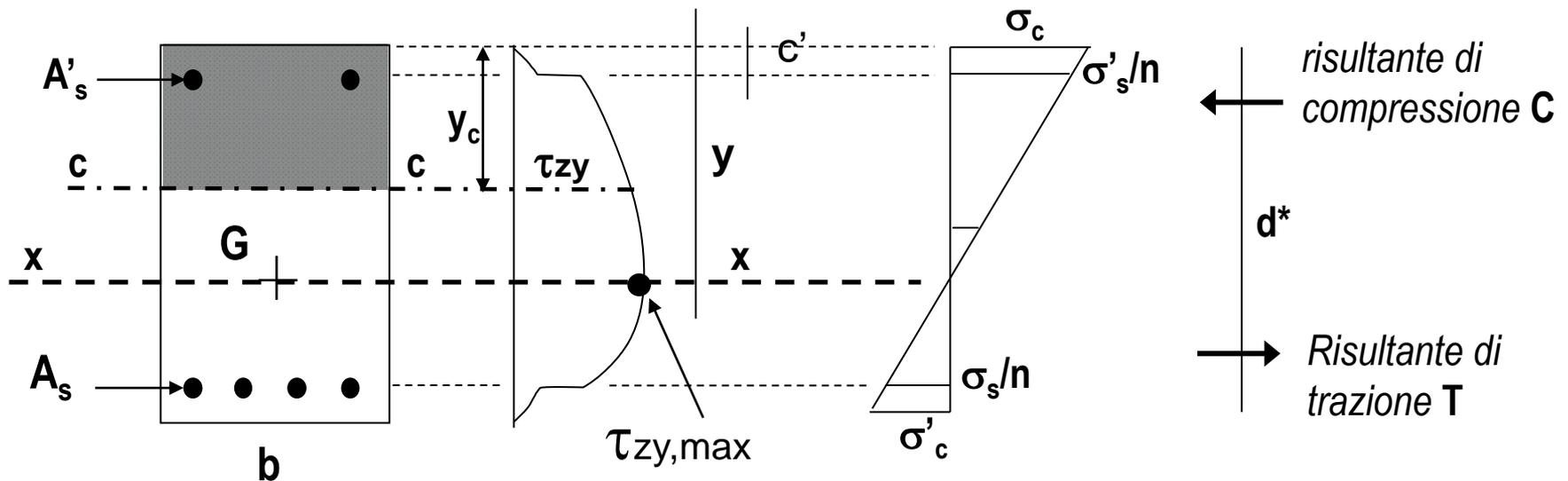
$$S_x(y_c) = b y_c (y - y_c/2) + n A'_s (y - c')$$

- $I_x$  è il momento di inerzia baricentrico dell'intera sezione, incluso il CLS teso (non fessurato)

# Calcolo elastico delle $\tau$ nel c.a. – Sezione interamente reagente

Distribuzione delle tensioni tangenziali in sezione rettangolare in c.a. con CLS reagente sia a compressione che a trazione (CLS non fessurato)

Le tensioni  $\tau_{zy}$  assumono il valore massimo in corrispondenza della corda baricentrica x-x



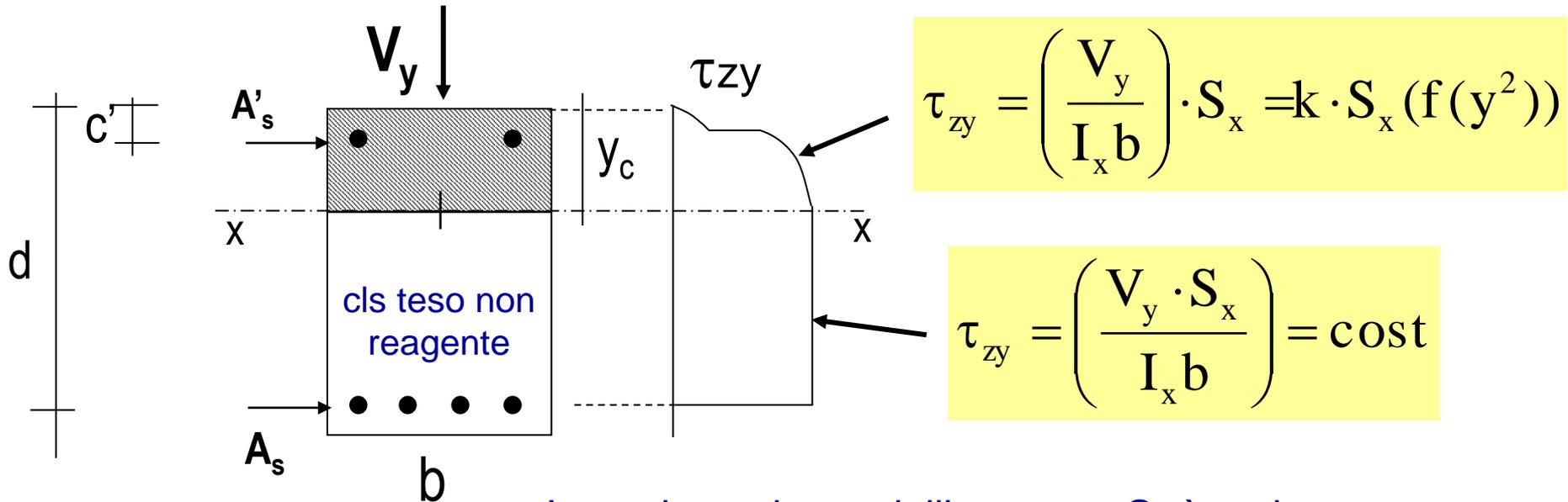
$$\tau_{max} = \frac{V_y \cdot S_x^*}{I_x \cdot b} = \frac{V_y}{d^* b}$$

$d^* = I_x / S_x^*$  è il braccio della coppia interna (distanza tra le risultanti di compressione  $C$  e trazione  $T$ , con  $C = T$ )

# Calcolo elastico delle $\tau$ nel c.a. – Sezione parzializzata

Distribuzioni delle tensioni tangenziali per sezione rettangolari in c.a. parzializzate (**flessione semplice: x-x coincide con n-n**)

Nella distribuzione delle tensioni tangenziali si riconosce un tratto con andamento parabolico (in corrispondenza del cls compresso) e un tratto costante (in corrispondenza del cls teso non reagente:  $\Delta S_x = 0$ )



$$\tau_{zy} = \left( \frac{V_y}{I_x b} \right) \cdot S_x = k \cdot S_x (f(y^2))$$

$$\tau_{zy} = \left( \frac{V_y \cdot S_x}{I_x b} \right) = \text{cost}$$

In corrispondenza dell'asse x-x,  $S_x$  è pari a:

$$S_x = b \cdot y_c \cdot y_c / 2 + n \cdot A'_s \cdot (y_c - c') = n \cdot A'_s \cdot (d - y)$$

# Calcolo elastico delle $\tau$ nel c.a. – Sezione parzializzata

Distribuzioni delle tensioni tangenziali per sezione rettangolari in c.a. parzializzate (**flessione semplice: x-x coincide con n-n**)

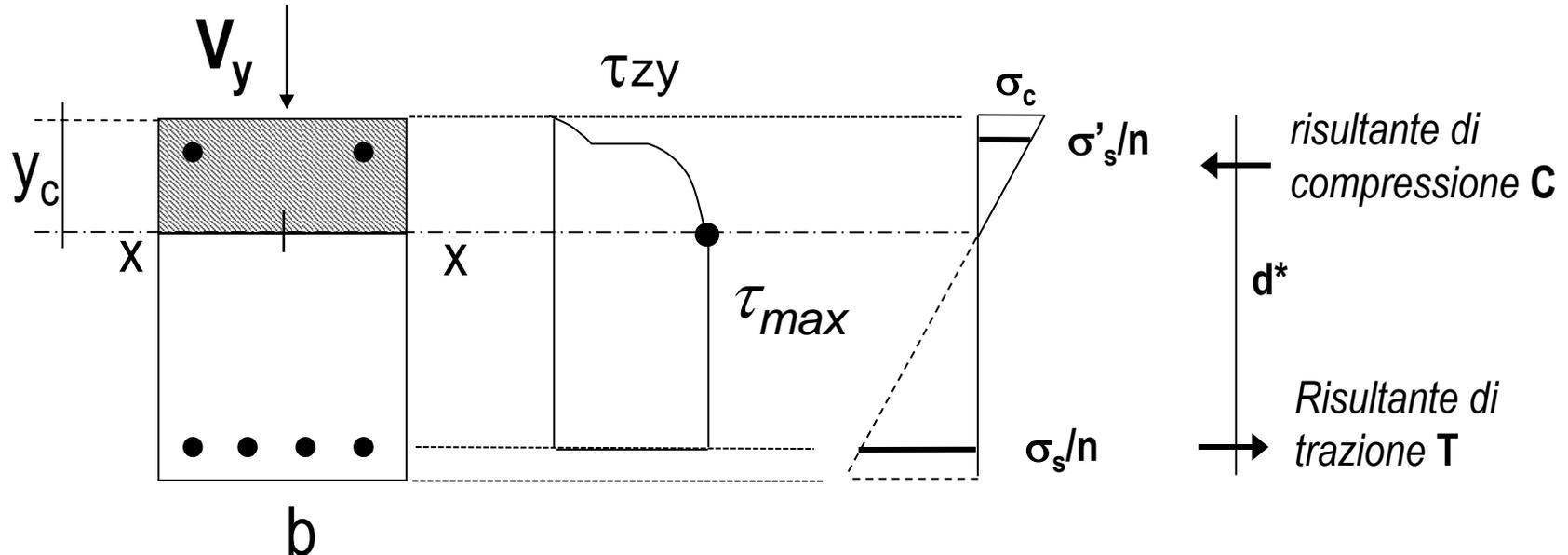
In corrispondenza della corda baricentrica si ha la tensione tangenziale massima  $\tau_{max}$ :

$$\tau_{max} = \frac{V_y}{b \cdot d^*}$$

dove:

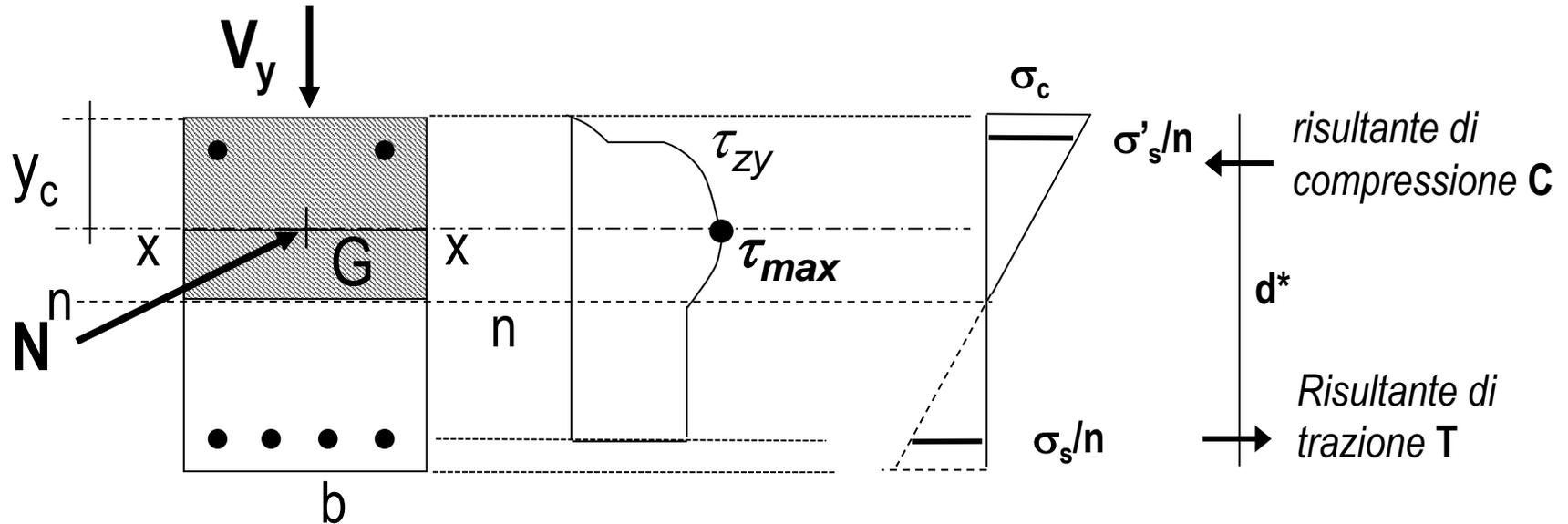
$$d^* = \frac{I_x}{S_x^*}$$

è il braccio della coppia interna



## Calcolo elastico delle $\tau$ nel c.a. – Sezione parzializzata

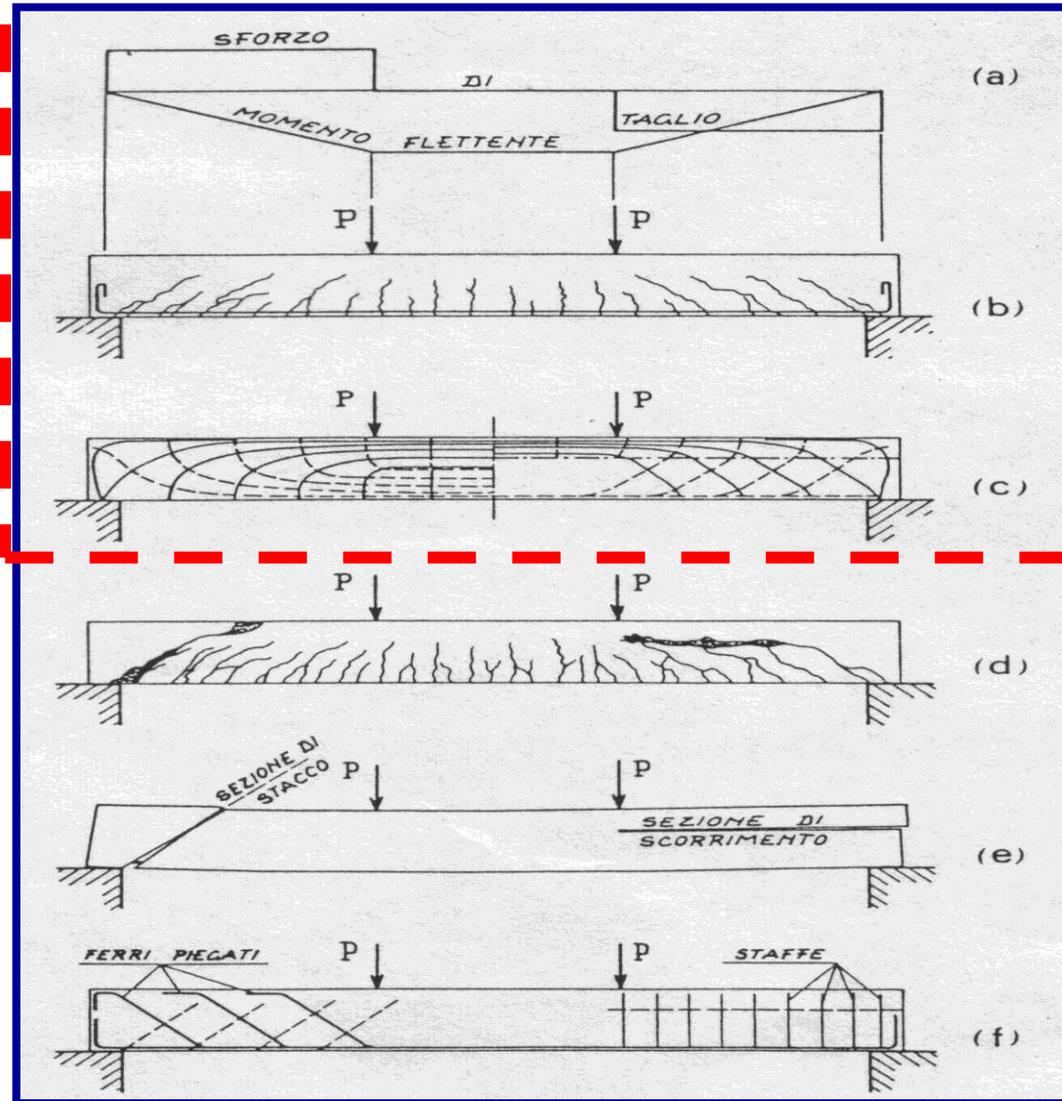
Distribuzioni delle tensioni tangenziali per sezione rettangolari in c.a. parzializzate (**flessione composta: x-x NON coincide con n-n**)



Le tensioni tangenziali massime sono valutate in corrispondenza dell'asse baricentrico x-x

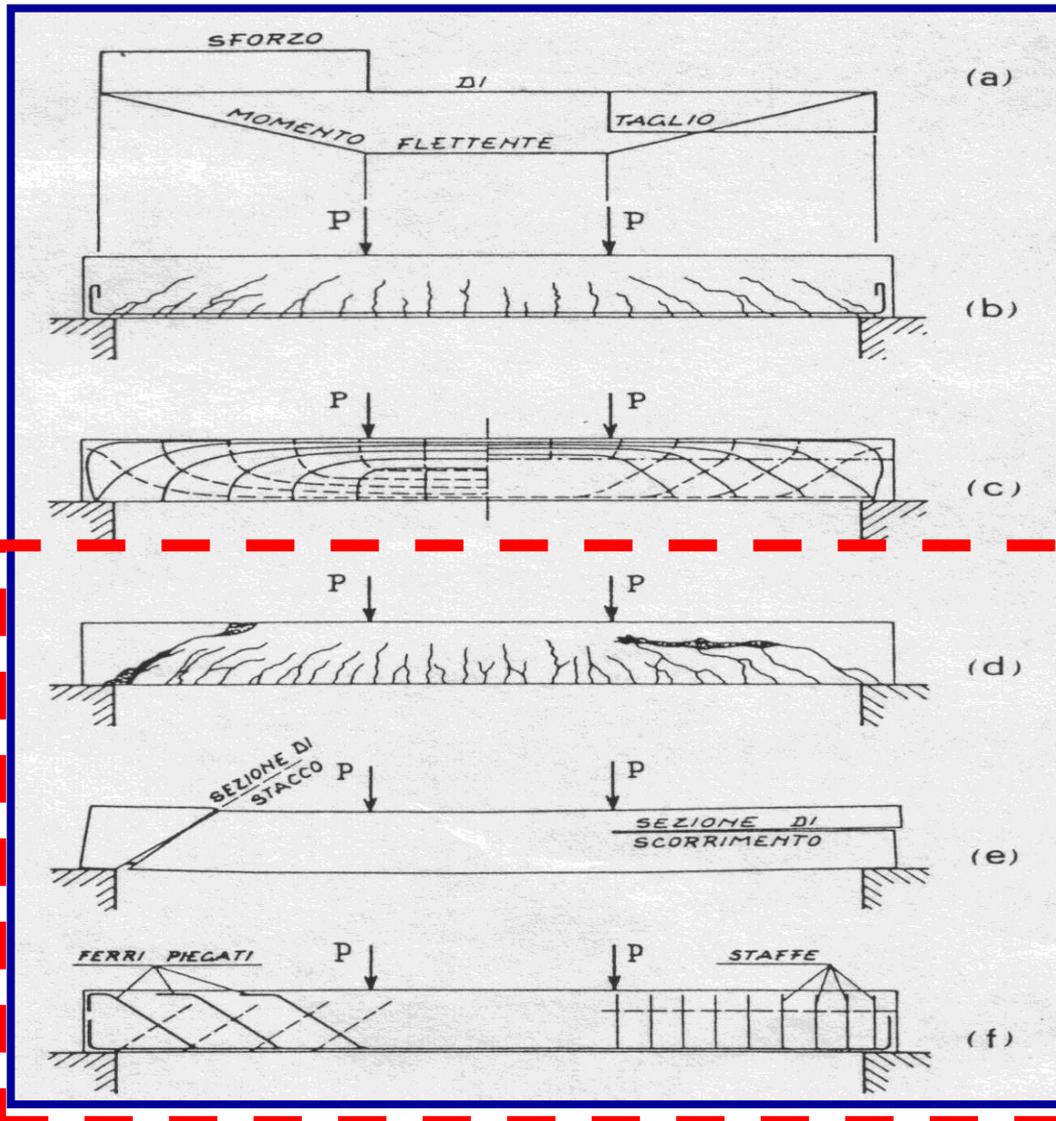
$$\tau_{max} = \frac{V_y}{b \cdot d^*}$$

# Il Taglio negli elementi in c.a.: il comportamento sperimentale



- (a) Sollecitazioni agenti sulla trave
- (b) Possibile configurazione delle fessure estese a tutta la trave
- (c) Isostatiche di trazione (linee tratteggiate) e di compressione (linee continue)

# Il Taglio negli elementi in c.a.: il comportamento sperimentale



## (d) Possibili meccanismi di crisi (alternativi):

- a sinistra completo distacco secondo la giacitura a  $45^\circ$  delle fessure da taglio;
- a destra crisi per tranciamento dei conci d'anima al livello del loro incastro nel corrente compresso con scorrimento longitudinale di una parte della trave rispetto all'altra.

## (e) Schematizzazione della "sezione di stacco" trasversale (sin) e della sezione di scorrimento longitudinale (des); meccanismi possibili, alternativi tra loro.

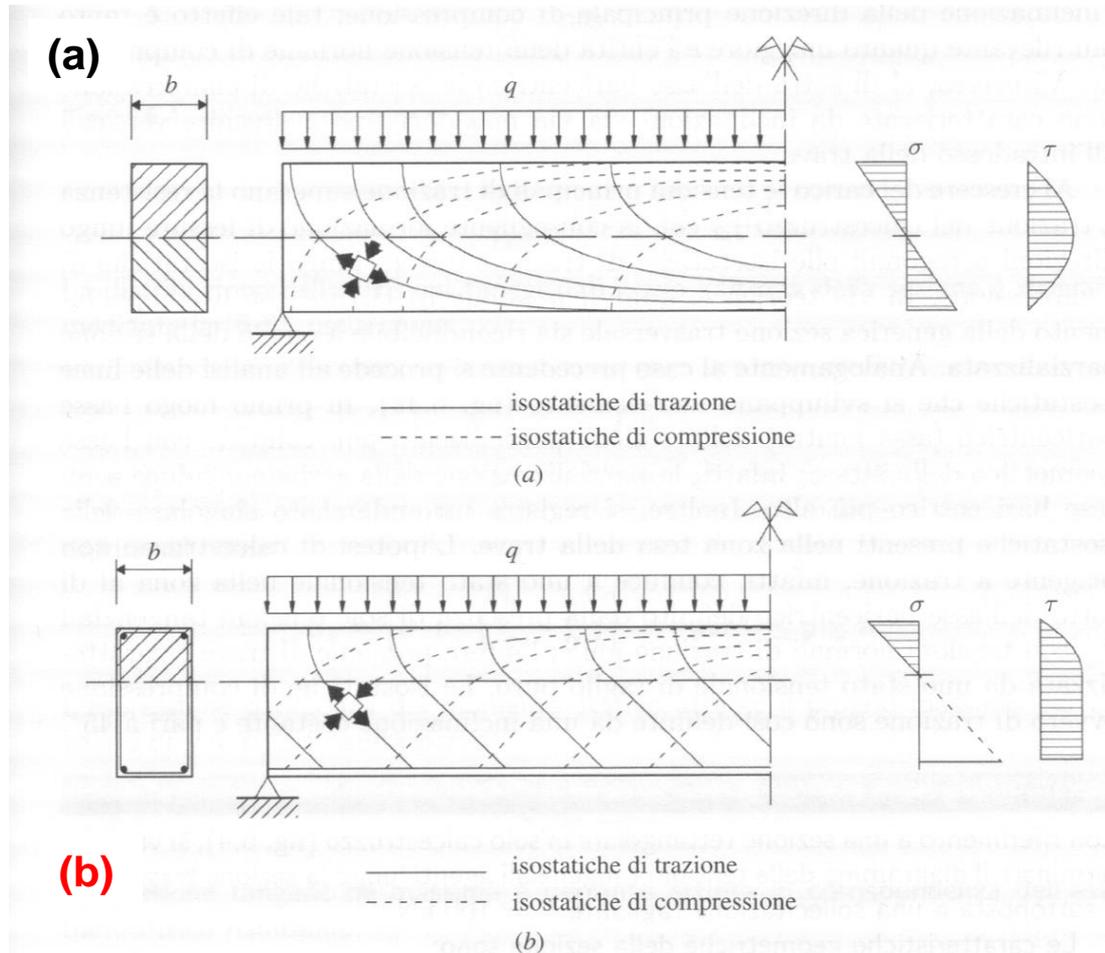
## (f) Armatura a taglio: staffe e/o ferri piegati (attenzione: armature valide per entrambi i meccanismi di crisi)

# Le tensioni tangenziali. Calcolo elastico

Isostatiche di compressione e di trazione di una trave inflessa sottoposta a un carico uniformemente distribuito nel caso di:

(a) sezione omogenea interamente reagente

(b) sezione parzializzata



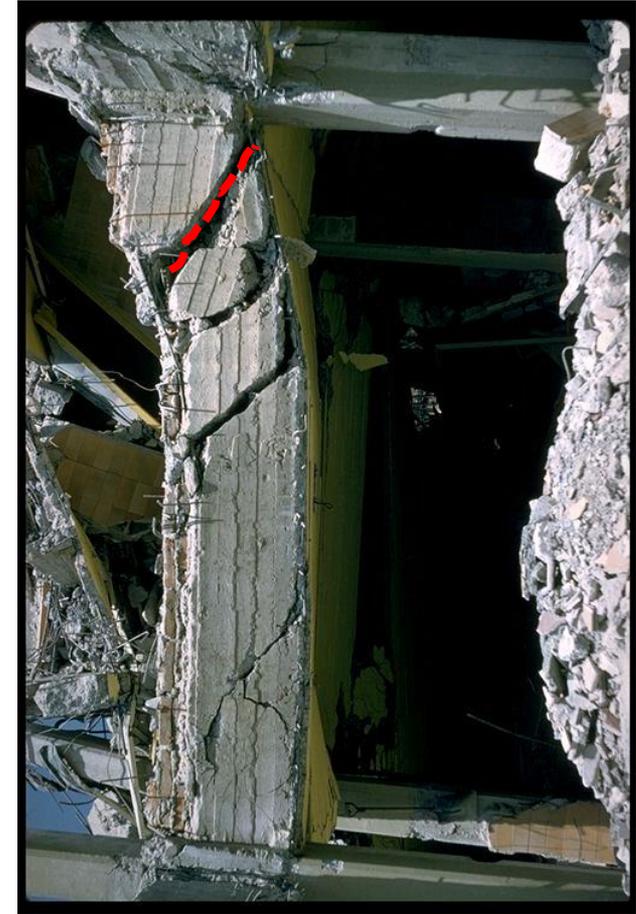
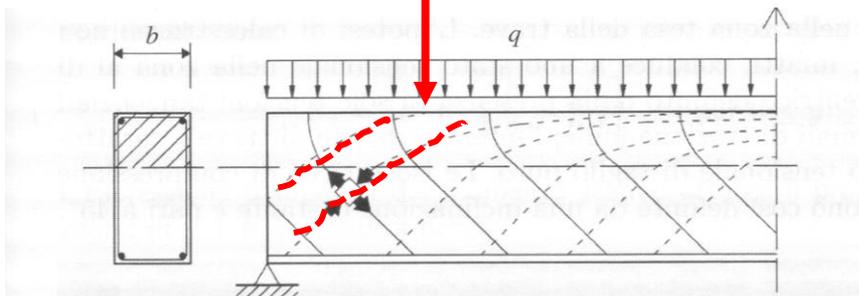
**(a):** Sezione interamente reagente

**(b):** Sezione parzializzata

# La crisi per taglio negli elementi in c.a.

## Esempi di rotture da taglio causate da azioni sismiche

### TRAVE



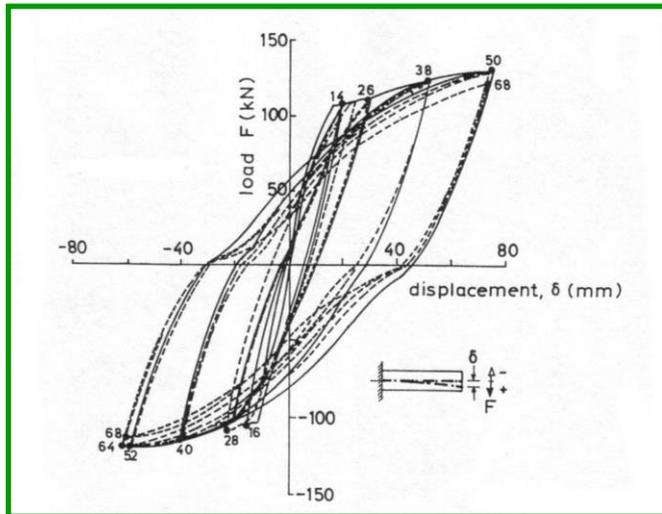
### PILASTRO

# Il Taglio negli elementi in c.a.: Modalità di rottura

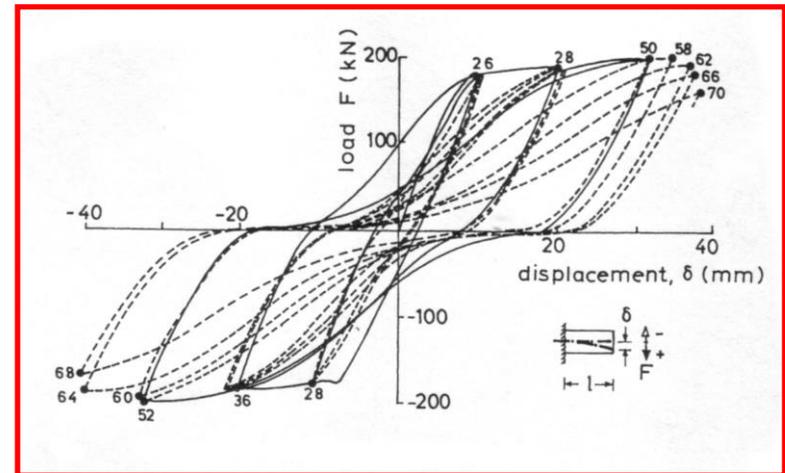
La crisi (rottura) per taglio è particolarmente pericolosa poiché **determina un rapido DEGRADO dell'elemento strutturale riducendone considerevolmente le capacità duttili e provocando rotture repentine con spiccate caratteristiche di FRAGILITÀ**

## Comportamento ciclico delle travi in c.a.

Comportamento ciclico in presenza di un **basso** sforzo di taglio (travi «lunghe»)



Comportamento ciclico in presenza di un **elevato** sforzo di taglio (travi «corte»)



# Il Taglio negli elementi in c.a.: Aspetti generali

---

## Parametri che influenzano il comportamento di un elemento in c.a. sottoposto a taglio

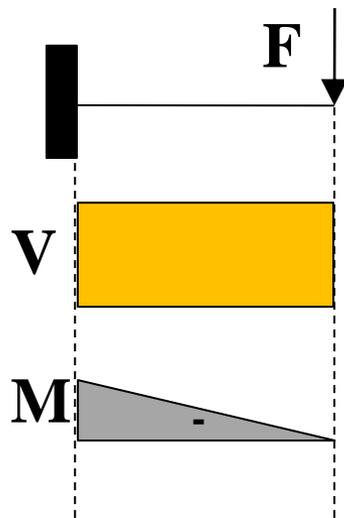
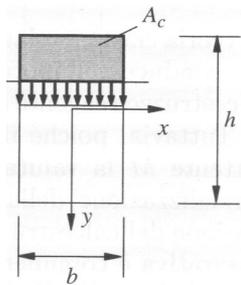
- Disposizione armature longitudinali
- Disposizione armature trasversali
- Aderenza acciaio-calcestruzzo
- Tipo e posizione dei carichi e dei vincoli
- Forma della sezione

# Il Taglio negli elementi in c.a.: comportamento

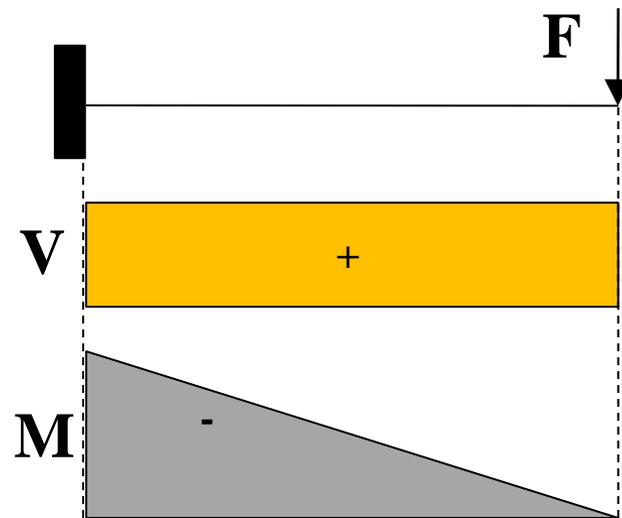
## Esaminiamo specificamente i due fattori:

- **Rapporto ( $M / V h$ )** che commisura l'importanza del momento flettente  $M$  all'entità del taglio  $V$  per l'altezza della sezione  $h$
- **Forma della sezione**

## Ruolo del rapporto $M / V h$



Trave «corta»: ( $M / V h$ ) basso



Trave «lunga»: ( $M / V h$ ) elevato

# Il Taglio negli elementi in c.a.: comportamento

---

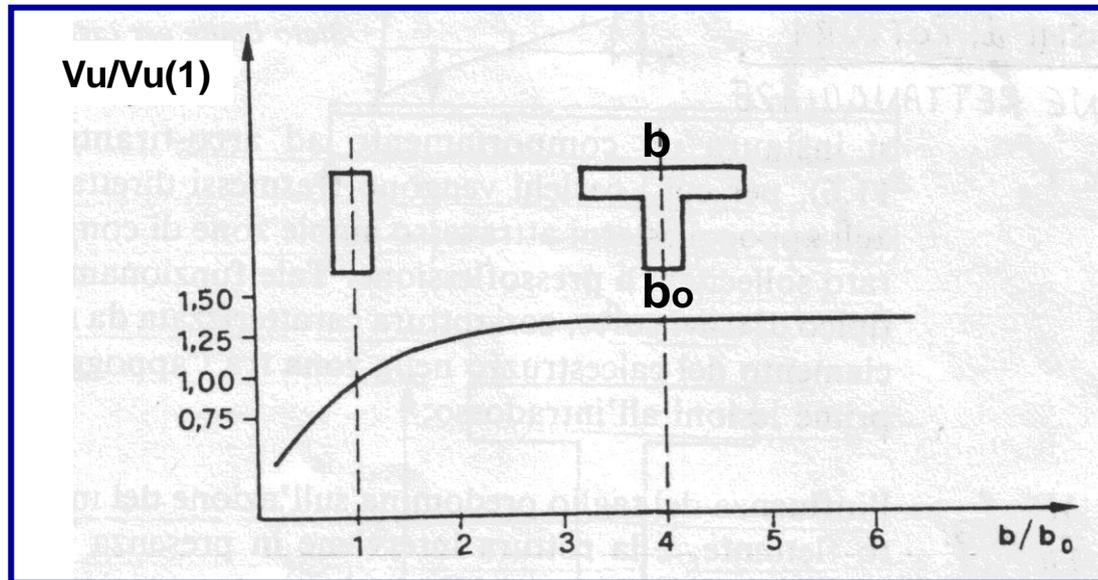
## RUOLO DEL RAPPORTO $M / V h$

Per travi rettangolari esaminando numerose prove sperimentali sono stati individuati i seguenti campi di funzionamento:

- $(M / V h) < 1$  comportamento arco-tirante tipico di travi corte con rottura caratterizzata da schiacciamento del cls nella zona tra l'appoggio e le prime lesioni all'intradosso;
- $1 \leq (M / V h) \leq 3$  l'influenza del taglio predomina sull'azione del momento flettente: la rottura interviene in presenza di una manifesta fessurazione obliqua che si propaga da metà altezza della trave verso i bordi;
- $3 \leq (M / V h) \leq 7$  il momento è predominante con lesioni che si innescano quasi verticalmente in corrispondenza del lembo teso per poi propagarsi verso l'alto;
- $(M / V h) > 7$  l'influenza del taglio diventa praticamente trascurabile rispetto all'effetto del momento flettente.

# Il Taglio negli elementi in c.a.: comportamento

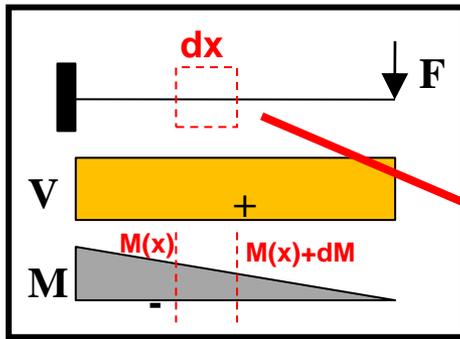
## RUOLO DELLA FORMA DELLA SEZIONE



Il diagramma mostra che l'andamento del taglio ultimo  $V_u$  tende ad un asintoto orizzontale per valori di  $b/b_0$  maggiori di 2-3.

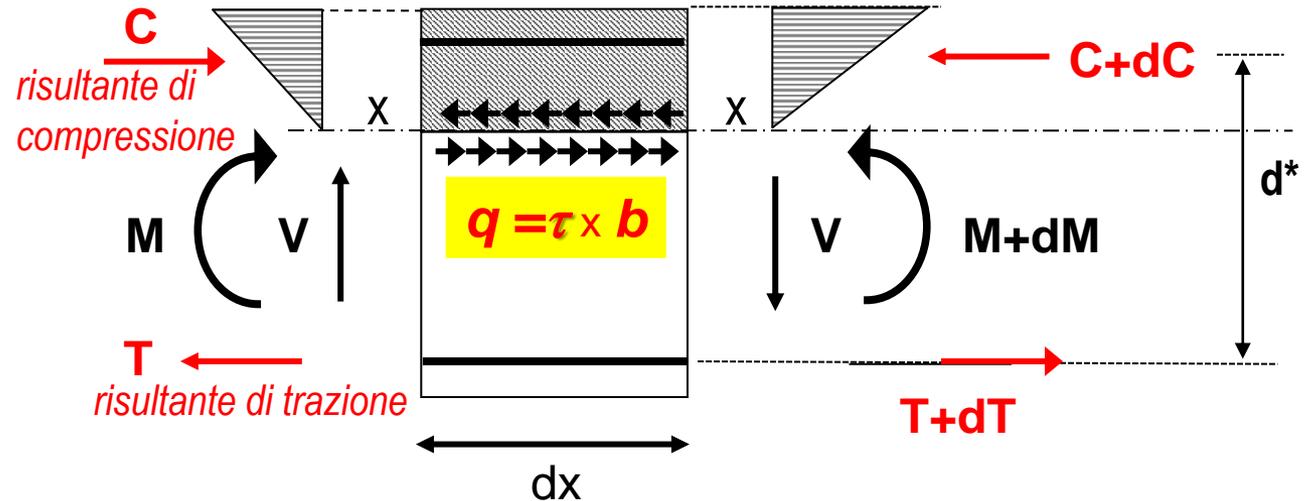
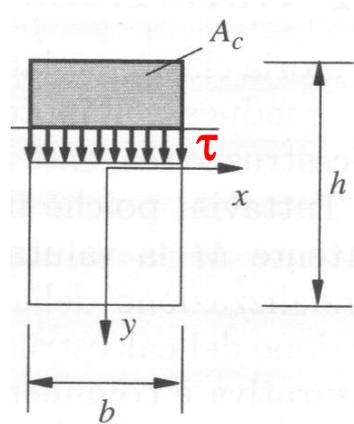
Vale:  $V_u(1) = V_u(b=b_0)$

# La sollecitazione di taglio: tensioni $\tau \rightarrow$ scorrimento $q$



Si consideri un concio di trave di lunghezza  $dx$  soggetto al momento  $M$  ed al taglio  $V$ .  
Vale la relazione:

$$V_y = \frac{dM}{dx}$$



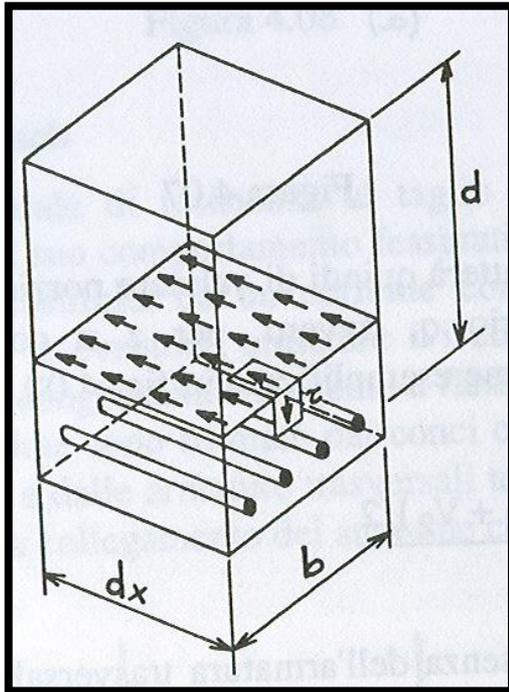
Considerando la parte di concio in corrispondenza dell'asse baricentrico, si può scrivere la seguente relazione di equilibrio:

$$q dx = dC = dT = \frac{dM}{d^*} = \frac{V_y}{d^*} dx$$

# La sollecitazione di taglio: lo scorrimento

La grandezza  $q$  è definita *forza di scorrimento unitaria*.

Essa può anche essere vista come risultante delle tensioni tangenziali  $\tau$  sulla superficie orizzontale:



$$q dx = \tau \cdot b \cdot dx = \frac{V_y S_x}{I_x b} b dx$$

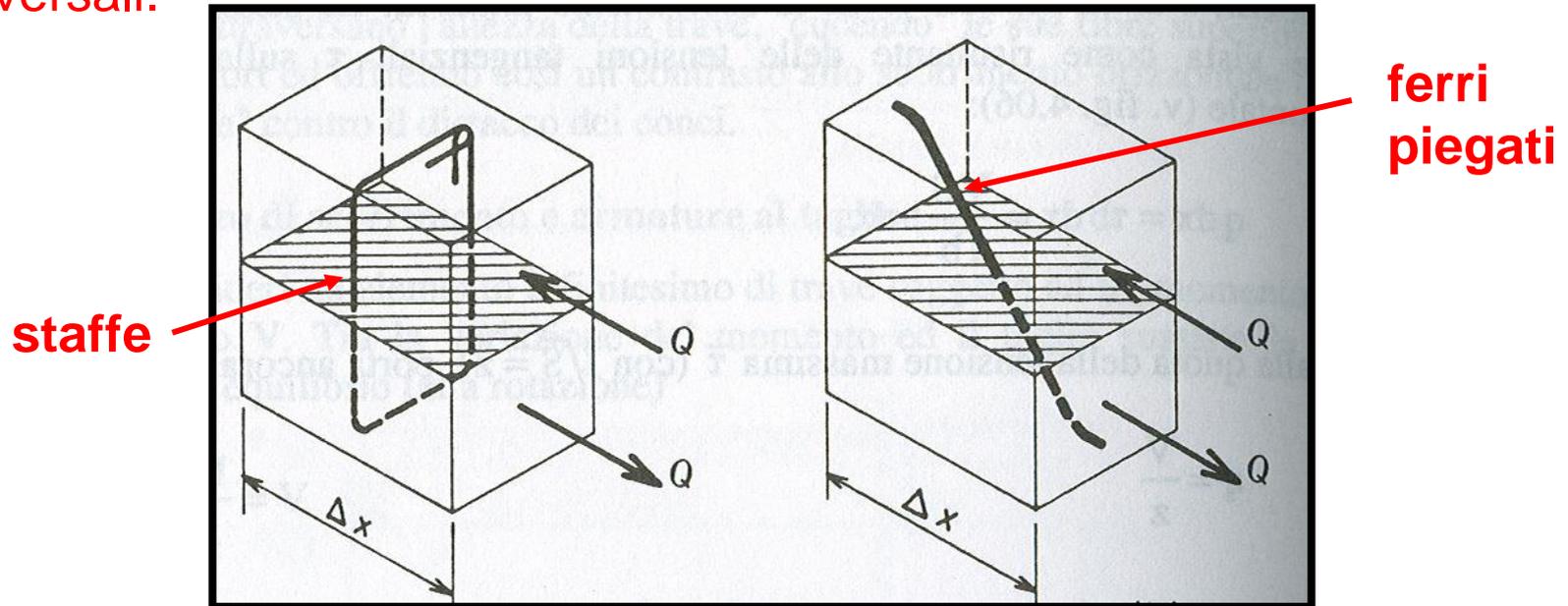
$$q = \frac{V_y S_x}{I_x}$$

In corrispondenza della tensione massima  $\tau_{\max}$  si ha che:

$$q = \frac{V}{d^*}$$

# Le sollecitazioni di taglio. Generalità

Per resistere agli sforzi di taglio vengono disposte apposite armature trasversali.

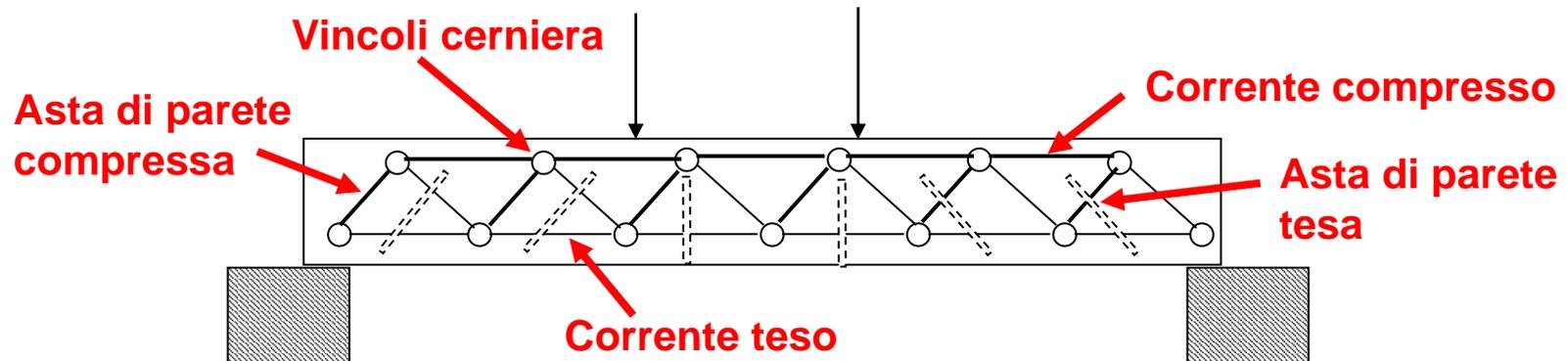
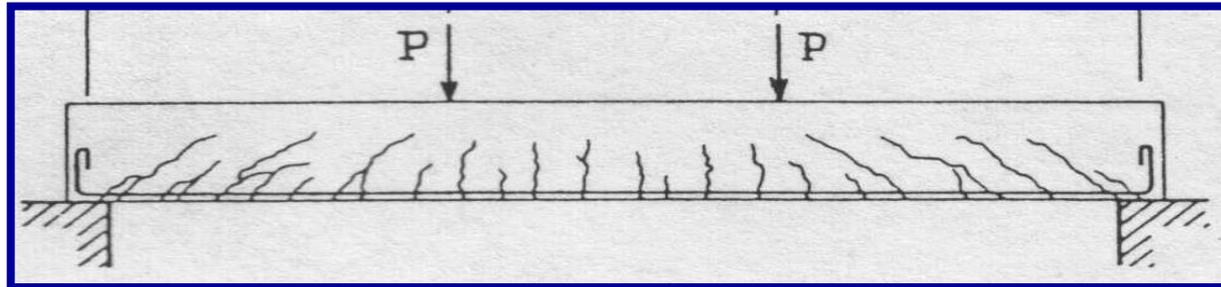


Il meccanismo resistente del taglio si estende ad un tratto di trave, pertanto non è possibile effettuare uno studio sezione per sezione.

Pertanto le armature a taglio vengono distribuite con un certo passo  $\Delta x$  ognuna di esse porta una quota parte di forza di scorrimento  $Q$ , pari a:

$$Q = \int_x^{x+\Delta x} q dx = \int_x^{x+\Delta x} \frac{V}{d^*} dx$$

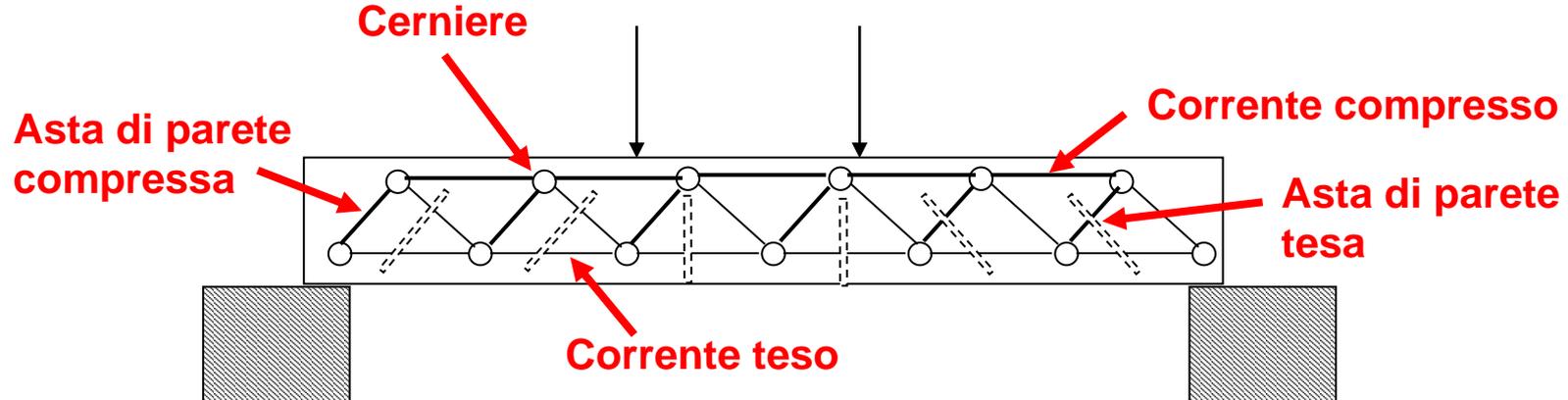
# Il modello di calcolo di Ritter-Mörsch



Il modello classico utilizzato per descrivere (con buona accuratezza) il comportamento a taglio di un elemento in c.a. armato a taglio è il cosiddetto **traliccio di Mörsch**, struttura reticolare costituita da:

- un **corrente compresso** (CLS non fessurato)
- un **corrente teso**
- un reticolo di **aste di parete** (puntoni di CLS compresso e armature a taglio tese) collegati ai due correnti con **vincoli cerniera** (ipotesi semplificatrice).

# Il modello di calcolo di Ritter-Mörsch



- Tutti gli elementi del traliccio di Mörsch sono considerati vincolati agli estremi da cerniere, ossia sono delle **bielle** soggette solo a sforzi assiali.
- Le aste di parete, considerate inclinate di  $45^\circ$ , sono costituite dalla parti di calcestruzzo compresso (tra due fessure) e dalle armature trasversali tese distribuite lungo la trave.
- **In assenza di armature trasversali** (ossia delle aste tese di parete) il traliccio sarebbe labile.

# ELEMENTI **NON** ARMATI A TAGLIO: Meccanismi Resistenti

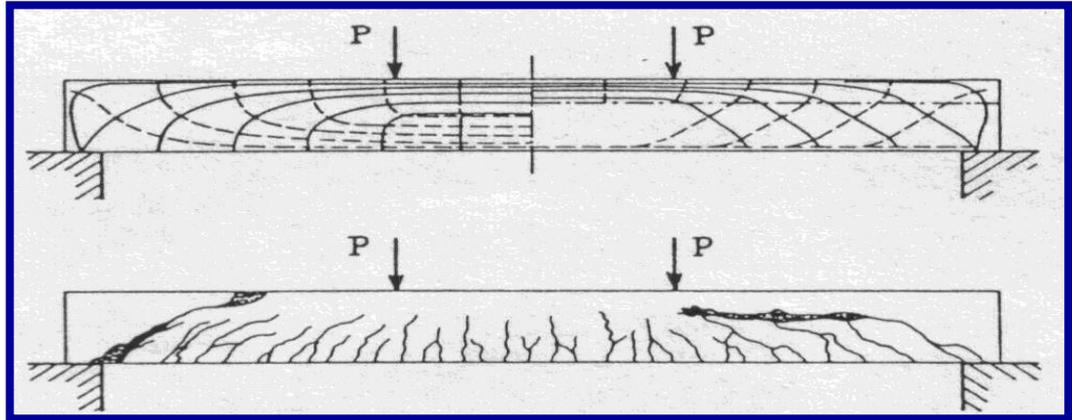
---

In realtà, seppure il modello basato sul *traliccio di Morsch* porti a dire che, in assenza di armature trasversali, il traliccio sarebbe labile, studi in campo sperimentale evidenziano che:

- anche elementi in c.a. privi di armature trasversali mostrano una resistenza a taglio non trascurabile, che deriva principalmente dalla resistenza a trazione del calcestruzzo, che nella “realtà” è piccola ma non nulla;
- la presenza di fessure da flessione (ossia superamento della resistenza a trazione nel CLS) non annulla la resistenza a taglio in quanto esistono una serie di altri contributi resistenti di cui è opportuno tenere conto nella definizione di un modello più rispondente alla realtà.

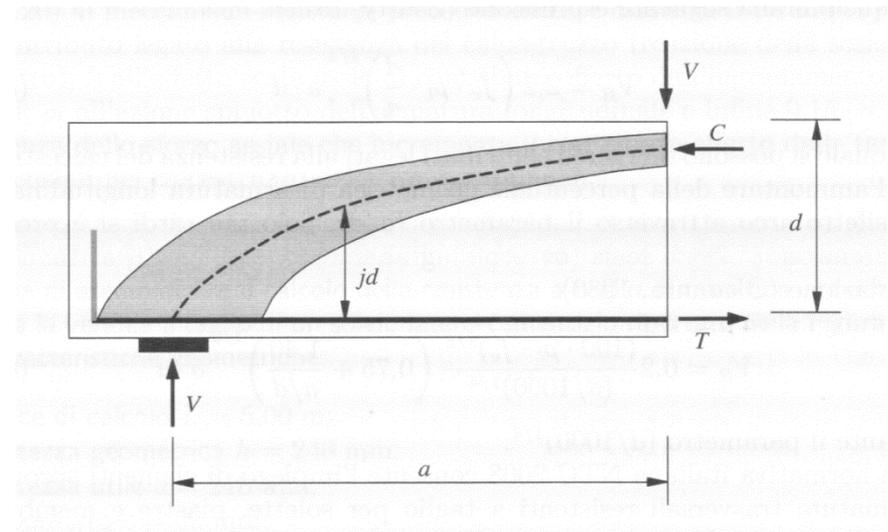
Infatti, in diverse applicazioni (per esempio i solai) è possibile realizzare elementi privi di apposita armatura a taglio, a patto che sussistano alcune condizioni previste dalle norme tecniche che trovano fondamento nei risultati forniti da indagini sperimentali.

# ELEMENTI **NON** ARMATI A TAGLIO: Meccanismi Resistenti



## a) Effetto arco

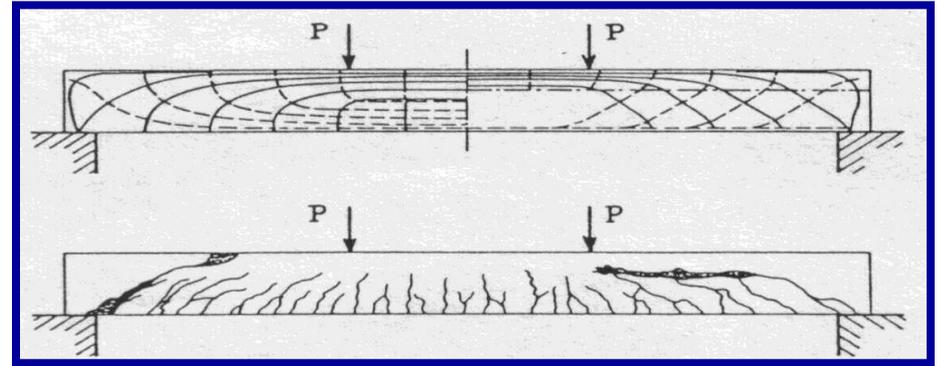
- Il meccanismo ad arco consente di trasferire un'aliquota del taglio direttamente nella sezione di appoggio attraverso gli sforzi di compressione derivanti dalla formazione, lungo l'altezza della sezione, di un arco resistente.
- Tale effetto è funzione delle dimensioni geometriche, ed in particolare aumenta al diminuire del rapporto tra la luce di taglio ( $a=M/V$ ) e l'altezza della sezione ( $d$ ).



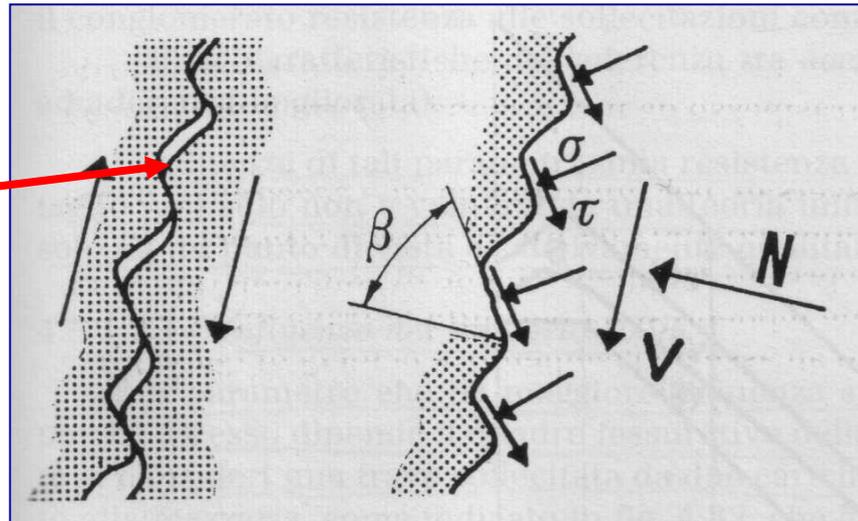
# ELEMENTI **NON** ARMATI A TAGLIO: Meccanismi Resistenti

## b) Ingranamento degli inerti (aggregate interlock) $V_b$

- Una quota  $V_b$  del taglio esterno è portata per ingranamento degli inerti, ossia per effetto della forza che si trasmette attraverso le superfici a contatto di una lesione inclinata quando i due lembi opposti tendono ad avere uno scorrimento relativo.
- E' un fenomeno di notevole rilevanza, specialmente in assenza di armature trasversali.

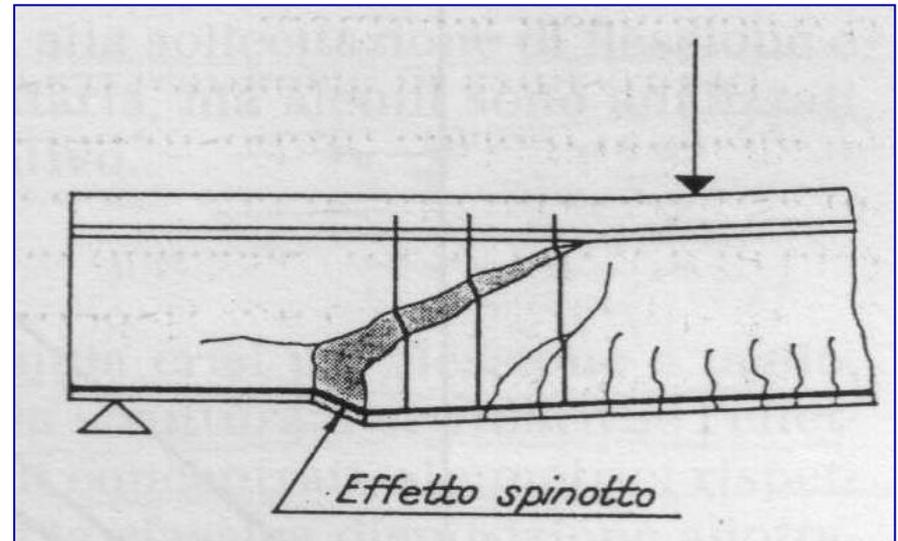


Lesione  
dovuta al  
taglio

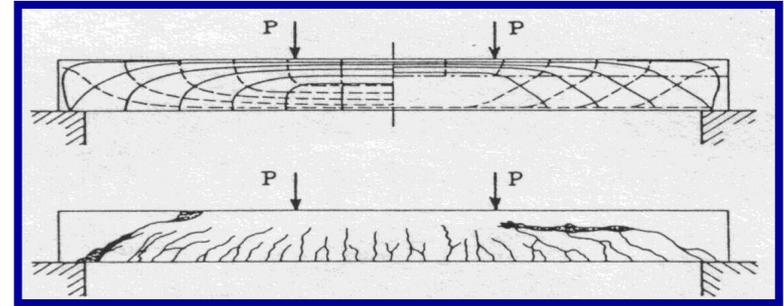


## c) Effetto spinotto o bietta (dowel action) $V_c$

- una ulteriore quota  $V_c$  del taglio esterno viene portata dalle barre longitudinali di acciaio per il cosiddetto "effetto spinotto" (*dowel action*), ossia mediante la resistenza a taglio offerta dalle barre che attraversano la fessura, quando si verifica uno scorrimento relativo tra le facce di tale fessura.
- Tale contributo è funzione di numerosi fattori, tra i quali la rigidezza del calcestruzzo al di sotto delle barre (copriferro) e la distanza tra la sezione in cui è presente la fessura e la staffa più vicina.
- In genere esplica un contributo di piccola entità ed inoltre, innescando lesioni di distacco lungo l'armatura longitudinale, può incrementare l'apertura delle lesioni inclinate riducendo l'effetto portante per ingranamento degli inerti.

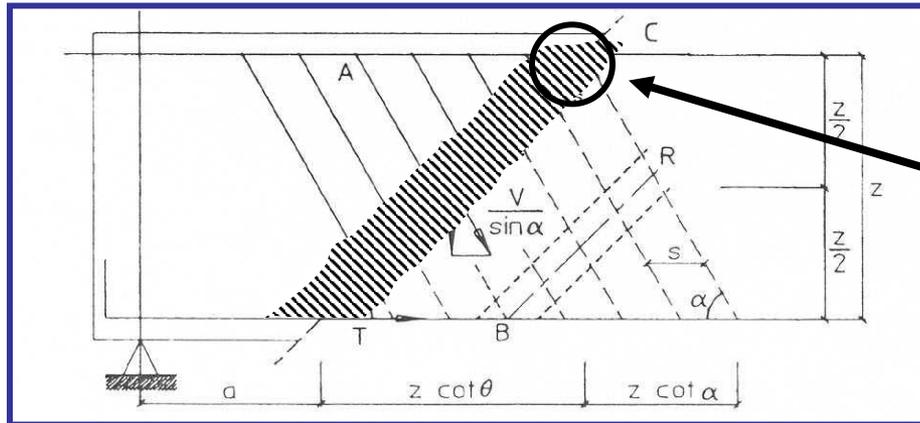


# ELEMENTI **NON** ARMATI A TAGLIO: Meccanismi Resistenti



## d) Bielle d'anima di CLS compresso $V_a$

- Un'aliquota  $V_a$  del taglio esterno viene portata direttamente dalle bielle di CLS compresso che si determinano tra due lesioni successive.
- Tali bielle risultano in realtà incastrate e non incernierate nel corrente superiore (come invece si ipotizza nel modello di Ritter-Morsch), per cui sono in grado di assorbire una parte della forza verticale che sollecita l'armatura trasversale (cosiddetto effetto pettine).
- Inoltre, è sperimentalmente dimostrato che le bielle hanno in genere una inclinazione minore di  $45^\circ$ , per cui si ha una ulteriore diminuzione delle tensioni nell'armatura trasversale.



bielle di cls  
compresso  
incastrate  
(e non  
incernierate)

# Stato Limite ultimo per sollecitazioni di Taglio. Le verifiche

La verifica allo SLU per taglio è soddisfatta se:  $V_{Rd} \geq V_{Ed}$   
dove  $V_{Ed}$  è il valore del taglio agente e  $V_{Rd}$  è il taglio resistente.

Per **elementi senza armatura resistente a taglio**  $V_{Rd}$  è valutato con la seguente espressione (di derivazione sperimentale):

$$V_{Rd} = \left\{ 0.18 \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_1 \cdot f_{ck})^{1/3} / \gamma_c + 0.15 \cdot \sigma_{cp} \right\} \cdot b_w \cdot d \geq (v_{\min} + 0.15 \cdot \sigma_{cp}) \cdot b_w \cdot d$$

$d$  è l'altezza utile della sezione [mm]

$b_w$  è la larghezza (minima) della sezione [mm]

$\rho_1 = A_{s1} / (b_w \cdot d)$  è il rapporto geometrico di armatura longitudinale ( $\leq 0.02$ )

$\sigma_{cp} = N_{Ed} / A_c$  è la tensione media di compressione nella sezione ( $\leq 0.2f_{cd}$ ) [N/mm<sup>2</sup>]

$$v_{\min} = 0.035 k^{3/2} f_{ck}^{1/2}$$

$$k = 1 + (200 / d)^{1/2} \leq 2$$

# Stato Limite ultimo per sollecitazioni di Taglio. Le verifiche

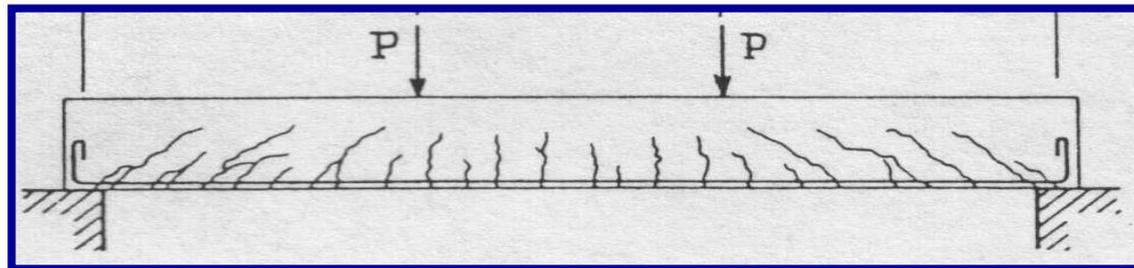
## Elementi **SENZA** armatura resistente a taglio

È interessante osservare che nella relazione:

$$V_{Rd} = \left\{ 0.18 \cdot k \cdot (100 \cdot \rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} / \gamma_c + 0.15 \cdot \sigma_{cp} \right\} \cdot b_w \cdot d$$

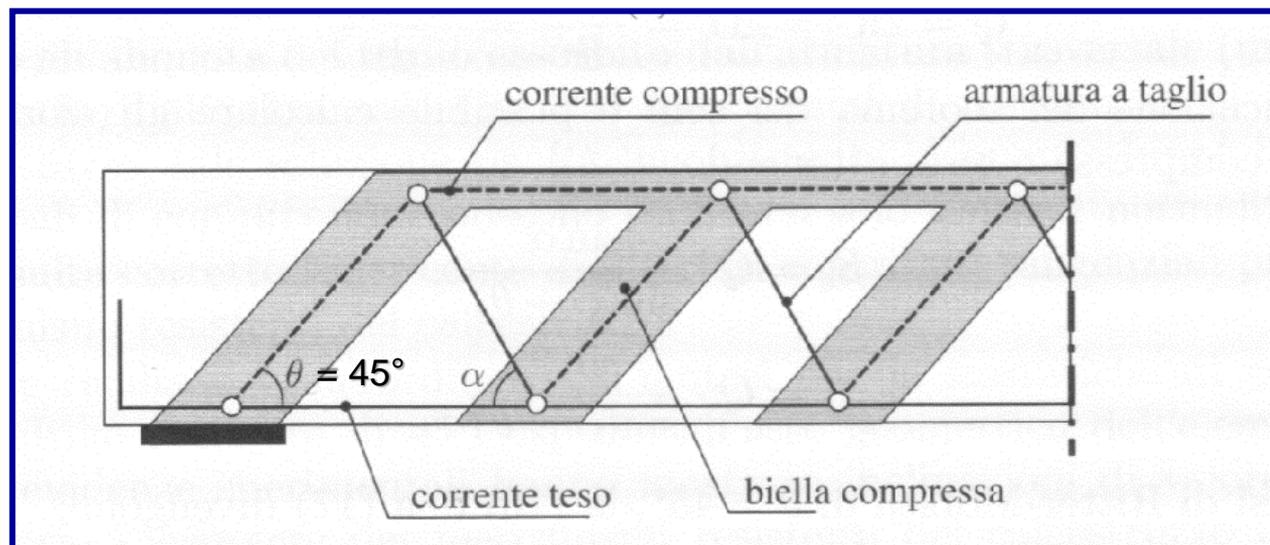
- $f_{ck}^{1/3}$  è il termine associato al meccanismo resistente alla sezione d'incastro della biella compressa;
- $k$  è associato al contributo offerto dall'ingranamento degli inerti;
- $\rho_l$  è associato all'effetto spinotto dell'armatura longitudinale;
- $0.15 \sigma_{cp}$  è associato alla presenza di uno sforzo normale di compressione, che aumenta il contributo delle tensioni tangenziali nella zona compressa di calcestruzzo.

# Elementi **armati** a taglio: il modello di Ritter-Mörsch



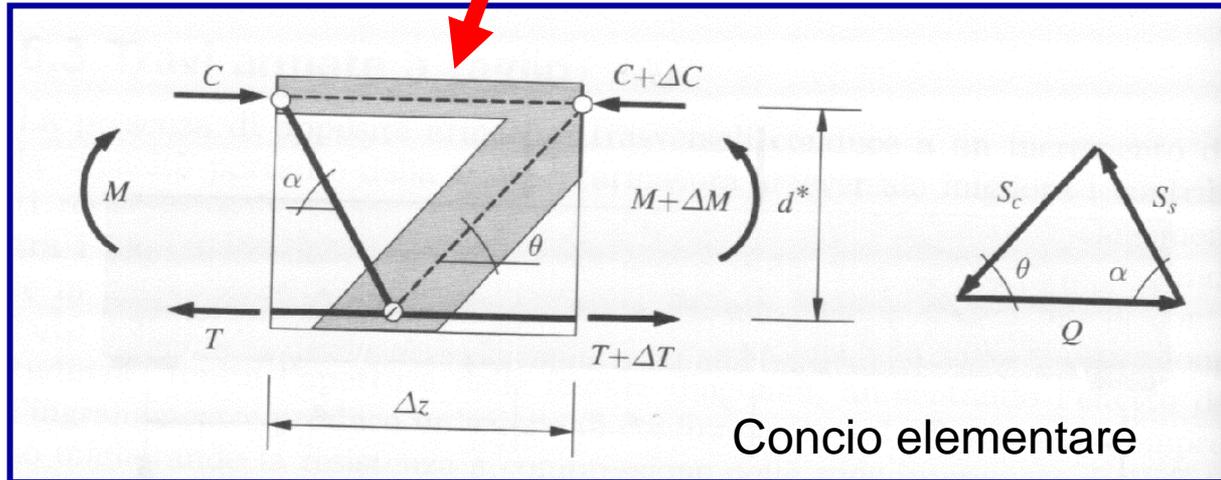
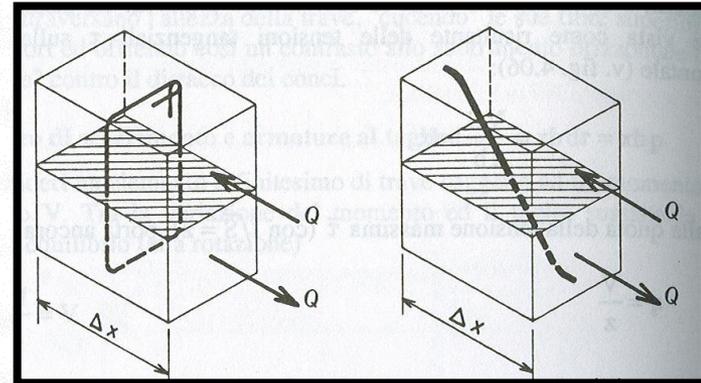
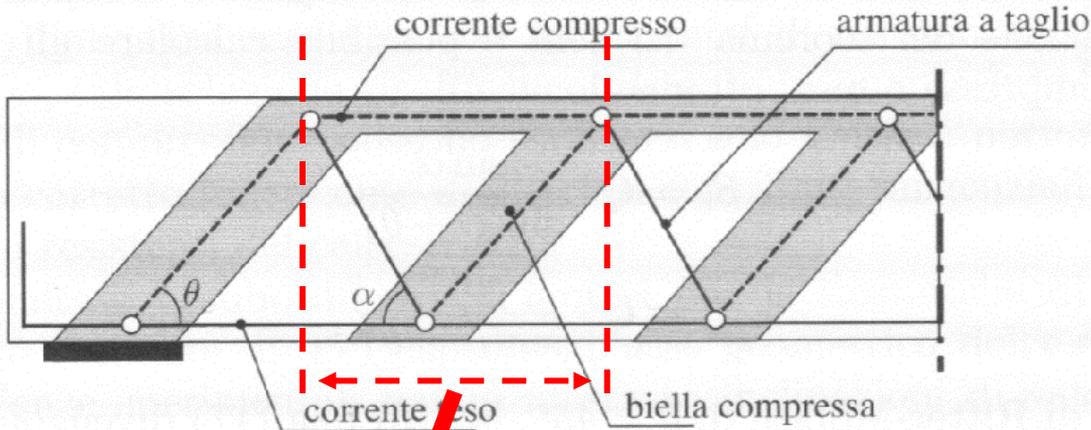
La trave è schematizzata con un **traliccio ideale** costituito da:

- bielle compresse inclinate di un angolo  $\theta = 45^\circ$
- armature trasversali tese (ferri piegati o staffe) inclinate di un angolo  $\alpha$
- corrente superiore compresso
- corrente inferiore teso (armatura longitudinale inferiore).



# Elementi **armati** a taglio: il modello di Ritter-Mörsch

## Calcolo degli sforzi agenti sulla biella compressa e le armature trasversali



Lo sforzo di scorrimento  $Q$  che si genera tra i correnti sup e inf è equilibrato da:

$S_s$  = sforzo assorbito dalla biella tesa

$S_c$  = sforzo assorbito dalla biella compressa

# Elementi **armati** a taglio: il modello di Ritter-Mörsch

Nel concio di lunghezza  $\Delta z$  lo sforzo di scorrimento in corrispondenza dell'asse neutro vale:

$$Q = (C + \Delta C) - C = (T + \Delta T) - T = \frac{\Delta M}{d^*} = \frac{V}{d^*} \Delta z \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{V}{d^*} \Delta z$$

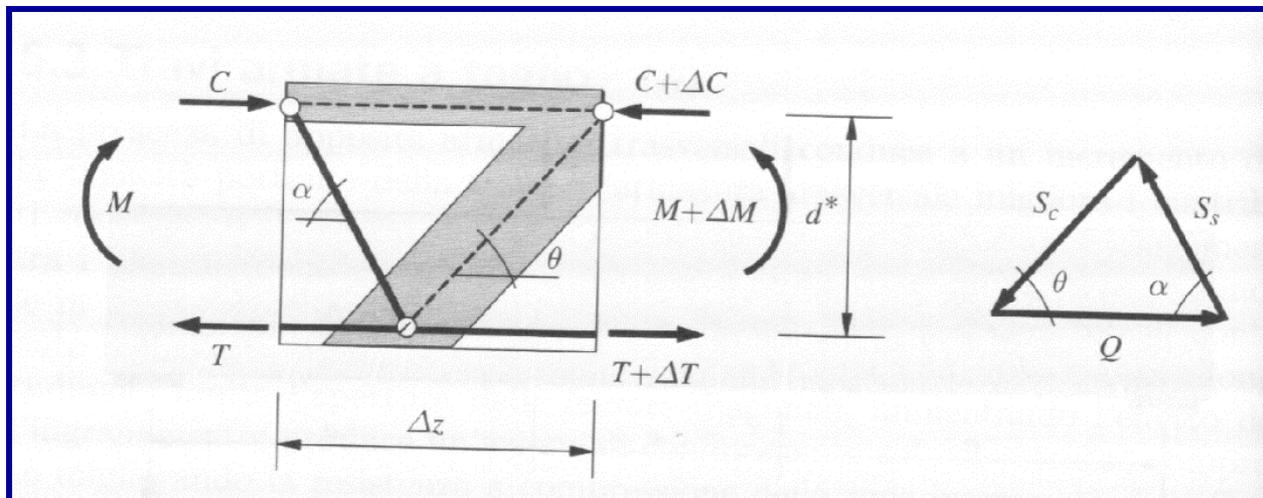
Applicando il *teorema dei seni* al poligono di forze **Q-S<sub>c</sub>-S<sub>s</sub>** si ha:

$$S_c = Q \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \theta)} = \frac{V \Delta z}{d^*} \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \theta)}$$

*Sforzo nella biella compressa*

$$S_s = Q \frac{\sin \theta}{\sin(\alpha + \theta)} = \frac{V \Delta z}{d^*} \frac{\sin \theta}{\sin(\alpha + \theta)}$$

*Sforzo nella biella tesa*



# Elementi **armati** a taglio: il modello di Ritter-Mörsch

$$S_c = Q \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V\Delta z}{d^*} \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

*Sforzo nella biella compressa*

$$S_s = Q \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V\Delta z}{d^*} \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

*Sforzo nella biella tesa*

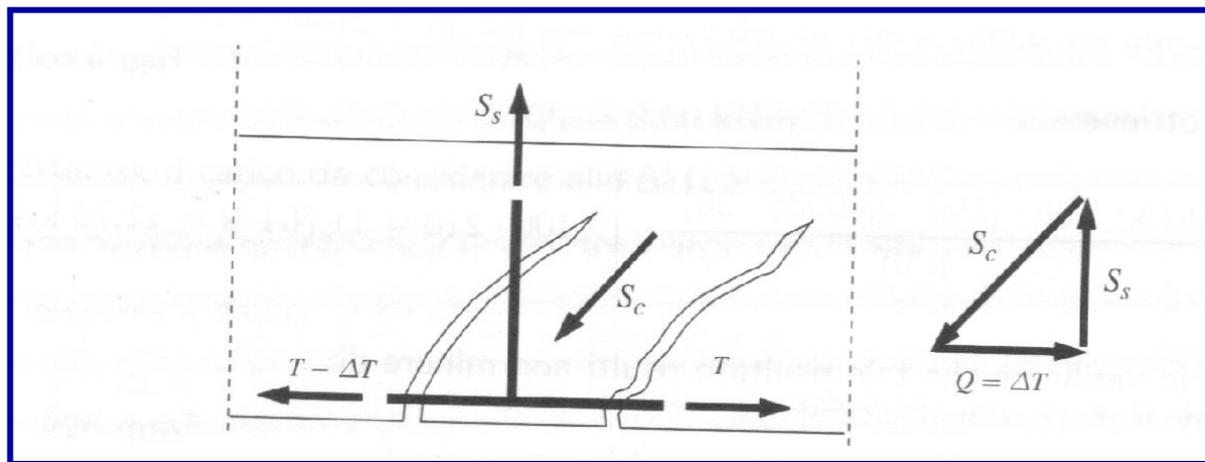
Le espressioni si particularizzano per  $\theta = 45^\circ$  (ipotesi del modello di **Ritter-Mörsch**) ed in presenza di **staffe** ( $\alpha = 90^\circ$ ):

$$S_c = \sqrt{2}Q$$

*Sforzo nella biella compressa*

$$S_s = Q$$

*Sforzo nella biella tesa*

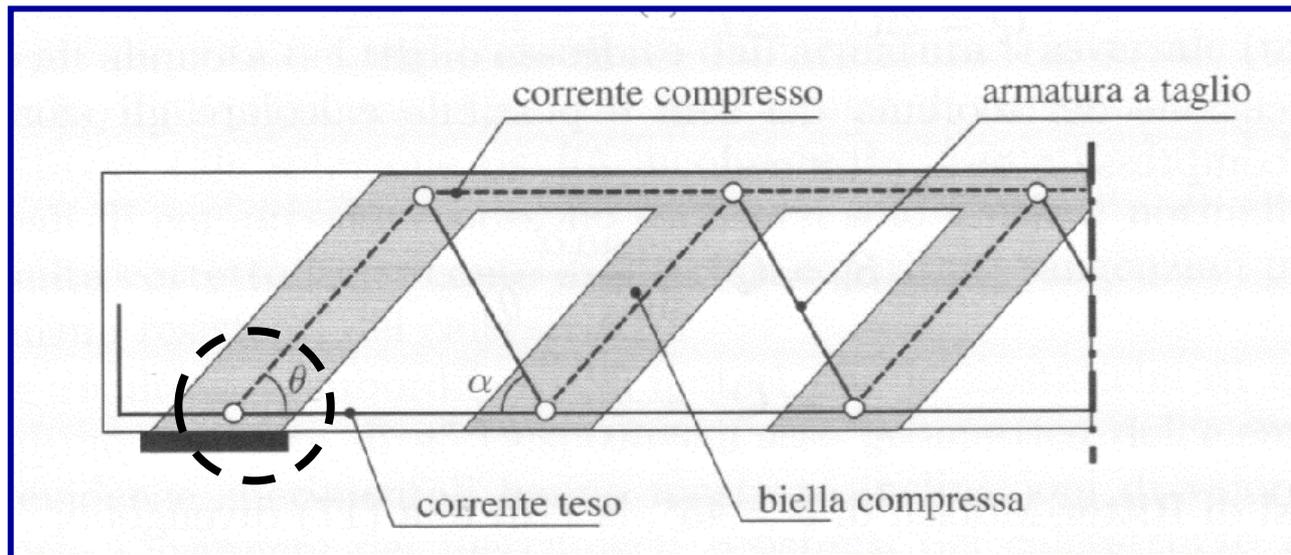


# Elementi **armati** a taglio: **il modello ad inclinazione variabile**

La trave è schematizzata con un **traliccio in cui il valore dell'angolo  $\theta$  NON È COSTANTE** ma varia in funzione delle caratteristiche geometriche e resistenti della sezione.

Il modello di calcolo è analogo a quello di Ritter-Morsch, ossia:

- **bielle di cls compresse** inclinate di un angolo  $\theta$
- **bielle di acciaio tese** inclinate di un angolo  $\alpha$  (armature trasversali)
- **corrente superiore compresso** (cls delimitato dall'asse neutro)
- **corrente inferiore teso** (barre di acciaio longitudinali)



# Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

## ELEMENTI CON ARMATURE TRASVERSALI RESISTENTI A TAGLIO

La verifica allo SLU per elementi con armatura trasversale resistente a taglio è soddisfatta se:

$$V_{Rd} \geq V_{Ed}$$

dove:

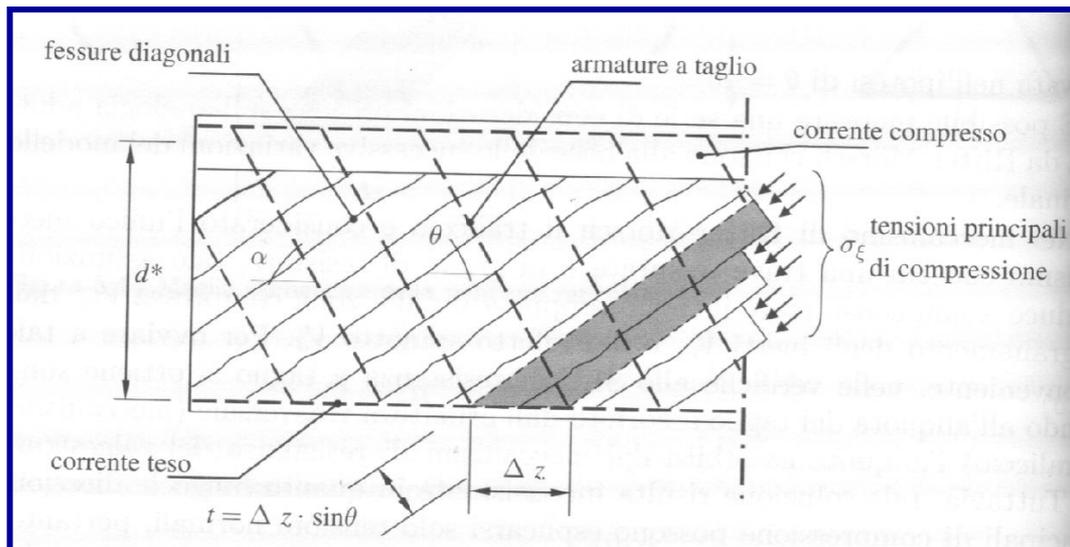
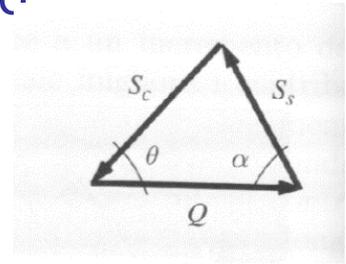
- $V_{Ed}$  è il valore dello sforzo di taglio agente
- $V_{Rd}$  è il taglio resistente pari al **mimino** tra il valore del **taglio “compressione”**  $V_{Rcd}$  (crisi della biella di cls) e **taglio “trazione”**  $V_{Rsd}$  (crisi della biella di armatura):

$$V_{Rd} = \min (V_{Rcd}; V_{Rsd})$$

# Il taglio “compressione”

In analogia con quanto determinato per il modello di Ritter-Mörsch lo sforzo agente  $S_c$  nella biella compressa è valutato attraverso:

$$S_c = Q \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V \cdot \Delta z}{d^*} \cdot \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$



La crisi nella biella di cls è raggiunta quando lo sforzo agente  $S_c$  eguaglia (o supera) la **resistenza della biella**  $S_{cd}$ , valutata attraverso la seguente espressione:

$$S_{cd} = b \cdot (\Delta z \cdot \text{sen} \theta) \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd}$$

# Il taglio “compressione”

Nell'espressione di  $S_{cd}$  la simbologia utilizzata ha il seguente significato:

$$S_{cd} = b \cdot (\Delta z \cdot \text{sen}\theta) \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd}$$

$v$  coefficiente che tiene conto della reale distribuzione delle tensioni ( $v = 0.5$  nelle NTC2018)

$b$  larghezza minima della sezione;

$f_{cd}$  resistenza di calcolo a compressione del cls;

$\theta$  angolo di inclinazione delle bielle di cls, che nella NTC2018 deve rispettare la seguente limitazione:  $1 \leq \cot\theta \leq 2.5$

$\alpha_c$  coefficiente maggiorativo che tiene conto della presenza/assenza dello sforzo normale. Nella NTC2018 è assunto pari a:

$1$  *per membrature non compresse*

$1 + \sigma_{cp}/f_{cd}$   $0 \leq \sigma_{cp} < 0.25f_{cd}$

$1,25$   $0.25f_{cd} \leq \sigma_{cp} \leq 0.5f_{cd}$

$2,5(1 - \sigma_{cp}/f_{cd})$   $0.5f_{cd} < \sigma_{cp} < f_{cd}$

$\sigma_{cp}$  tensione media di compressione della sezione.

# Il taglio “compressione”

Il valore del taglio “compressione” (crisi lato cls compresso: **taglio resistente**  $V_{Rcd}$ ) si ottiene eguagliando lo sforzo agente nel puntone  $S_c$  con quello resistente  $S_{cd}$ :

$$S_{cd} = b \cdot (\Delta z \cdot \text{sen}\theta) \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd} = S_c = Q \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V \cdot \Delta z}{d^*} \cdot \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

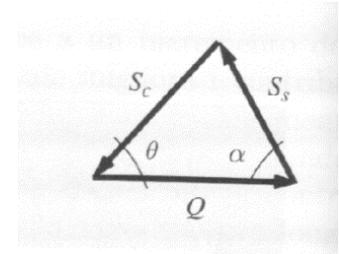
$$V_{Rcd} = b \cdot d^* \cdot v \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \frac{\text{cota}\alpha + \text{cot}\theta}{1 + \text{cot}^2\theta}$$

**Taglio “compressione” resistente**

# Il taglio “trazione”

In analogia con quanto determinato per il modello di Ritter-Mörsch lo sforzo agente nella biella tesa è valutato attraverso:

$$S_s = Q \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha + \theta)} = \frac{V\Delta z}{d^*} \frac{\sin\theta}{\sin(\alpha + \theta)}$$



La crisi nelle bielle di acciaio è raggiunta quando lo sforzo  $S_s$  eguaglia (o supera) la resistenza della biella tesa (armature trasversali a taglio), valutata attraverso:

$$S_{sd} = \frac{A_{sw} \cdot \Delta z}{s} f_{yd}$$

$A_{sw}$  area della singola armatura trasversale (nel caso di staffe è uguale all'area della singola barra per il numero di braccia);

$s$  distanza tra due armature trasversali consecutive (passo)

$f_{yd}$  tensione di snervamento di calcolo dell'acciaio

# Il taglio “trazione”

Il valore del taglio “trazione” (crisi lato acciaio teso: **taglio resistente**  $V_{Rsd}$ ) si ottiene eguagliando lo sforzo agente nella biella tesa  $S_s$  con quello resistente  $S_{sd}$ :

$$S_s = Q \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)} = \frac{V\Delta z}{d^*} \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}(\alpha + \theta)}$$

$$S_{sd} = \frac{A_{sw} \cdot \Delta z}{s} f_{yd}$$

$$V_{Rsd} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \frac{d^*}{s} \cdot \text{sen}\alpha \cdot (\text{cot}\alpha + \text{cot}\theta)$$

*Taglio “trazione” resistente*

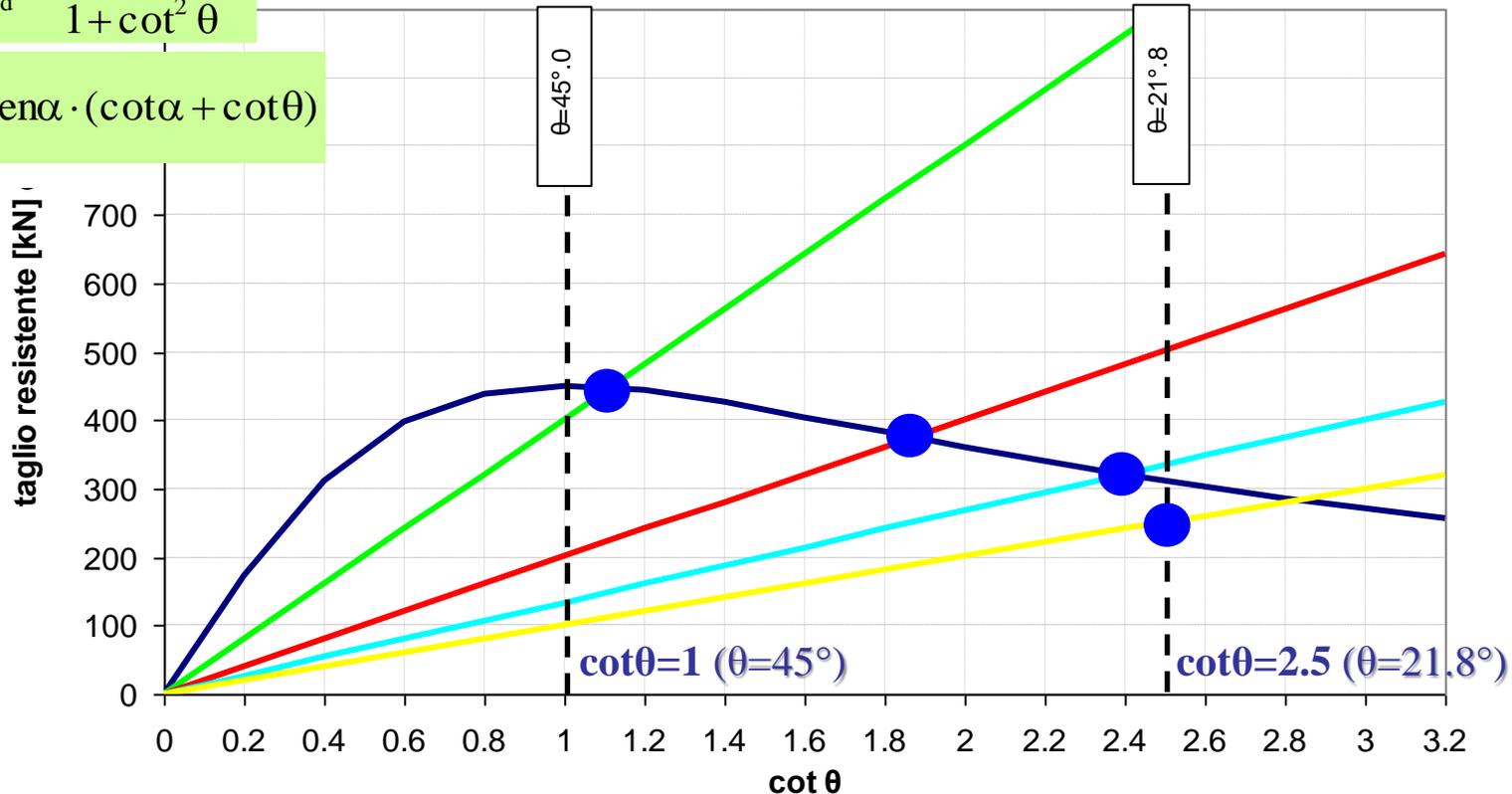
# Il taglio “trazione” – “compressione”

## Funzioni del taglio resistente “compressione” – “trazione”

$$V_{Rcd} = b \cdot d^* \cdot v \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \frac{\cot\alpha + \cot\theta}{1 + \cot^2\theta}$$

$$V_{Rsd} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \frac{d^*}{s} \cdot \sin\alpha \cdot (\cot\alpha + \cot\theta)$$

**NOTA:**  
il taglio resistente  $V_{Rsd}$  è calcolato considerando che vengano utilizzate staffe, ossia  $\alpha=90^\circ$



—  $V_{rcd}$  (300 x 600mm)

—  $V_{rsd}$  ( $A_{sw} = 100\text{mm}^2$ ,  $s = 70\text{mm}$ )

—  $V_{rsd}$  ( $A_{sw} = 100\text{mm}^2$ ,  $s = 100\text{mm}$ )

—  $V_{rsd}$  ( $A_{sw} = 100\text{mm}^2$ ,  $s = 150\text{mm}$ )

—  $V_{rsd}$  ( $A_{sw} = 100\text{mm}^2$ ,  $s = 200\text{mm}$ )

# Il taglio “compressione” - “trazione”

In una sezione in c.a. con armatura a taglio la crisi contemporanea del cls e dell'acciaio avviene in corrispondenza di un valore dell'angolo  $\theta$  valutato attraverso l'uguaglianza tra il taglio “compressione”  $V_{Rcd}$  e il taglio “trazione”  $V_{Rsd}$

$$V_{Rsd} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \frac{d^*}{s} \cdot \sin\alpha \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) = V_{Rcd} = b \cdot d^* \cdot v \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \frac{\cot\alpha + \cot\theta}{1 + \cot^2\theta}$$

$$\cot\theta = \sqrt{\frac{s \cdot b \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd}}{A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \sin\alpha} - 1}$$

La norma NTC2018 impone che il valore di  $\cot\theta$  deve rispettare la seguente limitazione:  $1 \leq \cot\theta \leq 2.5$

# Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

**ELEMENTI CON ARMATURE TRASVERSALI RESISTENTI A TAGLIO** (§ 4.1.2.3.5, NTC2018)

## Taglio “compressione”

La resistenza delle bielle compresse di CLS si valuta attraverso la seguente espressione:

$$V_{Rcd} = 0.9 \cdot d \cdot b_w \cdot \alpha_C \cdot f'_{cd} \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) / (1 + \cot^2 \theta)$$

$b_w$  è la larghezza minima della sezione;

$d$  è l'altezza utile della sezione;

$\sigma_{cp}$  è la tensione media di compressione della sezione;

$\alpha$  angolo di inclinazione dell'armatura trasversale rispetto all'asse della trave;

$f'_{cd}$  resistenza a compressione ridotta del calcestruzzo d'anima ( $f'_{cd} = 0,5 \times f_{cd}$ );

$\theta$  angolo di inclinazione delle bielle di cls  $1 \leq \cot\theta \leq 2.5$

$\alpha_C$  coefficiente maggiorativo pari a:

1	per membrature non compresse
$1 + \sigma_{cp}/f_{cd}$	$0 \leq \sigma_{cp} < 0.25f_{cd}$
1,25	$0.25f_{cd} \leq \sigma_{cp} \leq 0.5f_{cd}$
$2,5(1 - \sigma_{cp}/f_{cd})$	$0.5f_{cd} < \sigma_{cp} < f_{cd}$

# Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

**ELEMENTI CON ARMATURE TRASVERSALI RESISTENTI A TAGLIO** (§ 4.1.2.1.3, NTC2018)

## Taglio “trazione”

La resistenza delle armature trasversali si valuta attraverso la seguente espressione:

$$V_{Rsd} = 0.9 \cdot d \cdot \frac{A_{sw}}{s} \cdot f_{yd} \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) \cdot \text{sen}\alpha$$

- $A_{sw}$  area dell'armatura trasversale;  
 $d$  altezza utile della sezione;  
 $s$  interasse tra due armature trasversali consecutive;  
 $\alpha$  angolo di inclinazione dell'armatura trasversale rispetto all'asse della trave;  
 $f_{yd}$  resistenza di calcolo dell'acciaio;  
 $\theta$  angolo di inclinazione delle bielle di cls  $1 \leq \cot\theta \leq 2.5$

# Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

*ELEMENTI CON ARMATURE TRASVERSALI RESISTENTI A TAGLIO* (§ 4.1.2.3.5, NTC2018)

La verifica allo SLU per elementi con armature trasversale resistente a taglio è soddisfatta se:

$$V_{Rd} \geq V_{Ed}$$

dove:

- $V_{Ed}$  è il valore dello sforzo di taglio agente
- $V_{Rd}$  è il taglio resistente pari al minimo tra il valore del taglio “compressione”  $V_{Rcd}$  (puntone di CLS) e taglio “trazione”  $V_{Rsd}$  (biella di armatura tesa):

$$V_{Rd} = \min (V_{Rcd}; V_{Rsd})$$

# Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

La valutazione del taglio resistente di una sezione in c.a. armata a taglio prevede:

## 1) determinazione della cotangente dell'angolo di inclinazione $\theta$ delle bielle compresse

Tale operazione si effettua uguagliando il taglio “trazione” e il taglio “compressione”

$$V_{Rcd} = V_{Rsd} \Rightarrow \cot\theta = \sqrt{\frac{s \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f'_{cd}}{A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \sin\alpha} - 1}$$

## 2) controllo del rispetto del limite di normativa e determinazione del taglio resistente $V_{Rd}$

Bisogna controllare che il valore di  $\cot\theta$  rientri nei limiti previsti dalla norma NTC2018:  $1 \leq \cot\theta \leq 2.5$

# Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

In funzione del valore calcolato di  $\cot\theta$ , il valore del taglio resistente  $V_{Rd}$  è valutato attraverso:

caso a):  $1 \leq \cot\theta \leq 2.5 \Rightarrow V_{Rd} = V_{Rcd}(\cot\theta) = V_{Rsd}(\cot\theta)$

***crisi contemporanea CLS e armatura***

caso b):  $\cot\theta > 2.5 \Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rsd|\cot\theta=2.5}; V_{Rcd|\cot\theta=2.5}) = V_{Rsd}(\cot\theta = 2.5)$

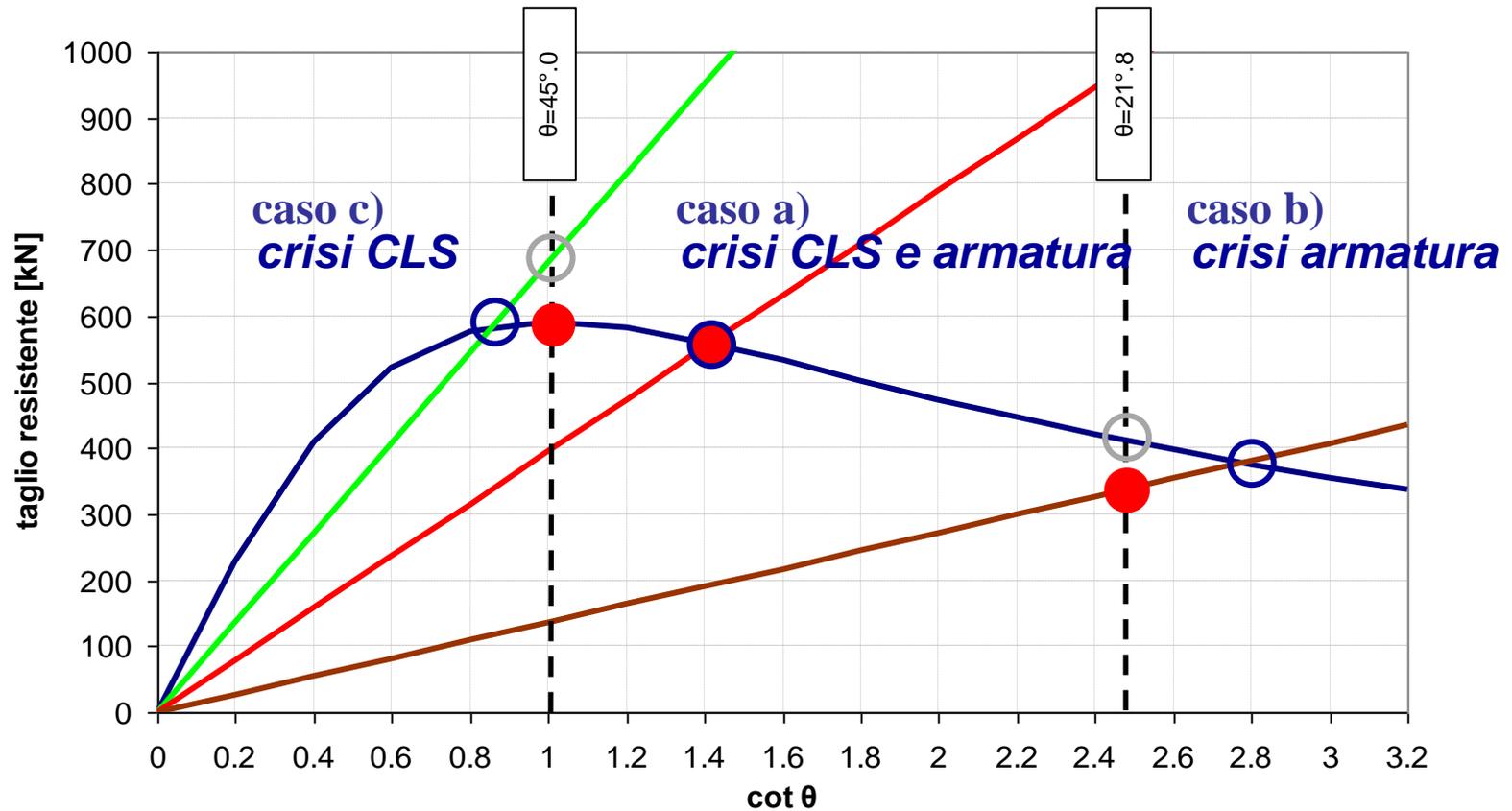
***crisi armatura***

caso c):  $\cot\theta < 1 \Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rsd|\cot\theta=1.0}; V_{Rcd|\cot\theta=1.0}) = V_{Rcd}(\cot\theta = 1.0)$

***crisi calcestruzzo***

$$\cot\theta = \sqrt{\frac{s \cdot b \cdot \alpha_c \cdot v \cdot f_{cd}}{A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \sin\alpha} - 1}$$

# Le verifiche di sicurezza per lo Stato Limite Ultimo

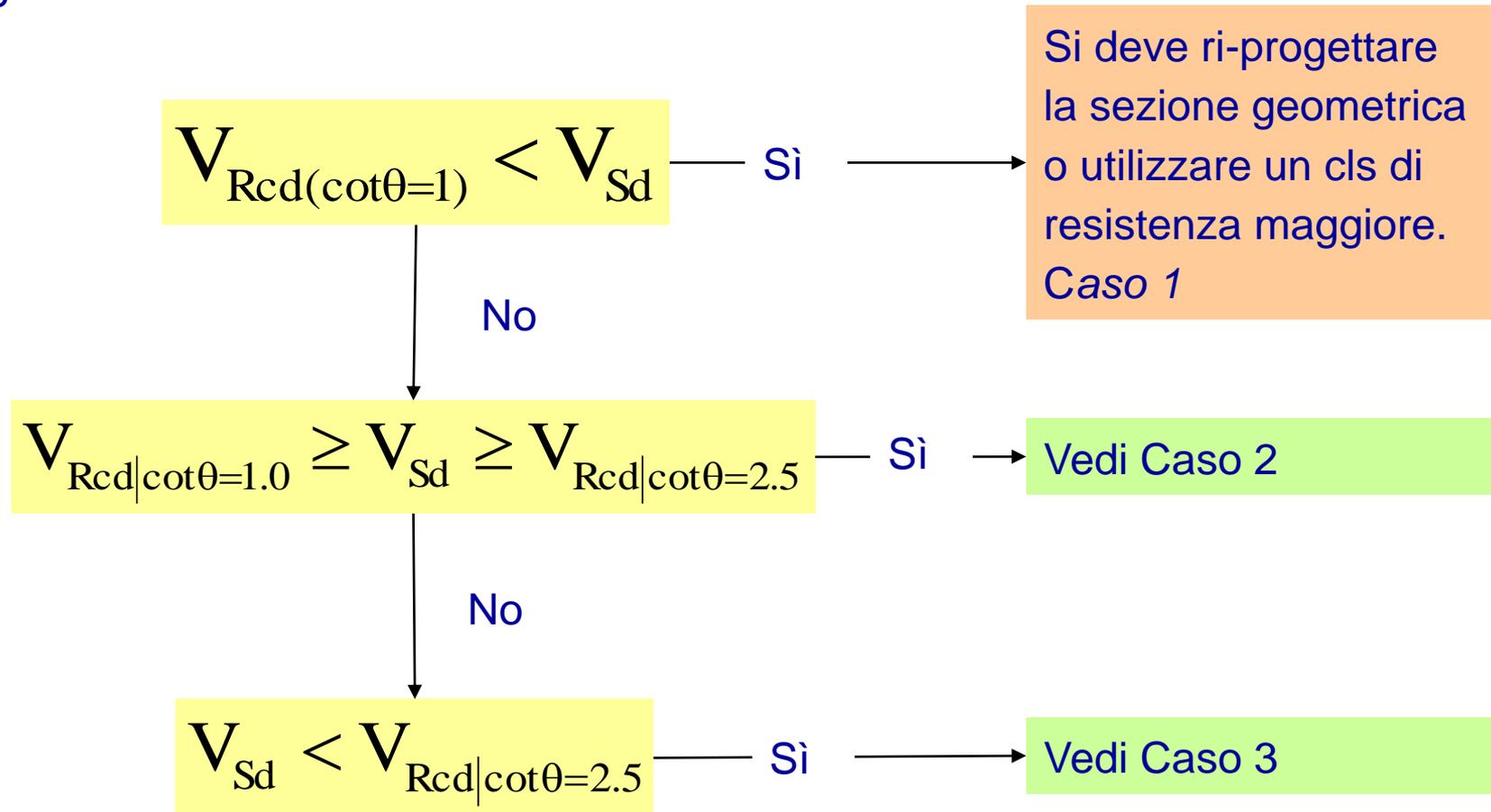


— Funzione taglio “compressione”,  $V_{Rcd}$

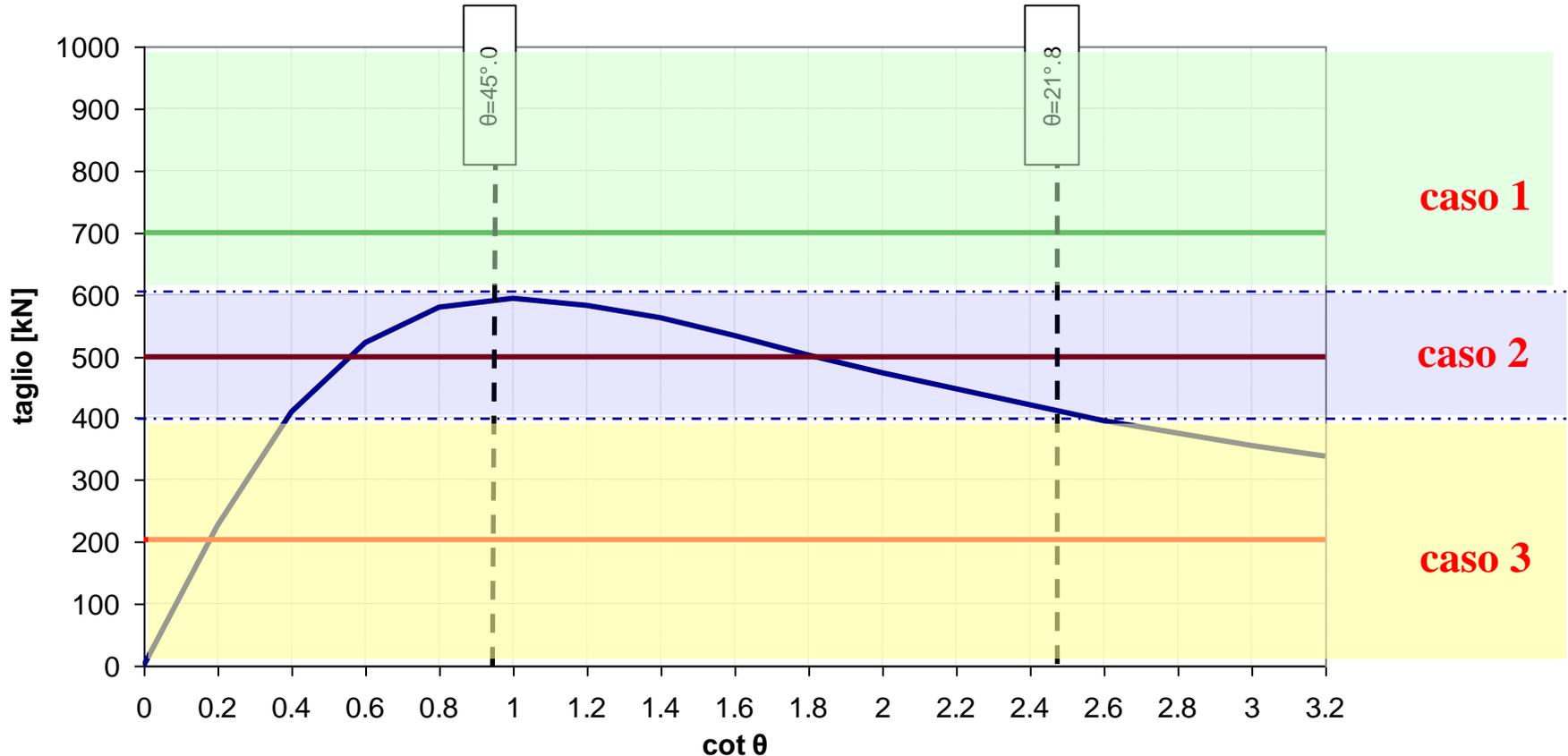
— Funzioni taglio resistente “trazione”,  $V_{Rsd}$  (al variare di  $A_{sw}/s$ )

# Il Progetto delle armature

Per la **progettazione delle armature a taglio** si procede secondo il seguente schema:



# Il Progetto delle armature



- Funzione taglio “compressione”,  $V_{rcd}$
- Valori di Taglio agente  $V_{sd}$

# Il Progetto delle armature

Caso 2:

$$V_{Rcd|cot\theta=1.0} \geq V_{Sd} \geq V_{Rcd|cot\theta=2.5}$$

Il valore della  $\cot\theta$  è valutato attraverso l'uguaglianza tra il taglio agente  $V_{Sd}$  e quello resistente del cls  $V_{Rcd}$  (taglio "compressione") :

$$V_{Rcd} = V_{Sd} \Rightarrow \cot\theta = f(V_{Sd}, d, b_w, \alpha_C, f'_{cd}, \cot\alpha)$$

Noto il valore di  $\cot\theta$  l'armatura a taglio è determinata attraverso l'uguaglianza tra il taglio agente  $V_{Sd}$  e quello resistente "trazione"  $V_{Rsd}$ , dove l'unica incognita è il rapporto  $A_{sw}/s$ .

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Sd}}{0.9 \cdot d \cdot f_{yd} \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) \cdot \sin\alpha}$$

$A_{sw}$  area dell'armatura trasversale  
 $s$  interasse tra due armature trasversali consecutive

# Il Progetto delle armature

Caso 3:

$$V_{Sd} < V_{Rcd|cot\theta=2.5}$$

Il progetto dell'armatura a taglio (rapporto  $A_{sw}/s$ ) viene eseguito imponendo l'uguaglianza tra il taglio agente  $V_{Sd}$  e quello resistente dell'armatura  $V_{Rsd}$  (taglio "trazione") in corrispondenza di  $cot\theta = 2.5$  :

$$V_{Sd} = V_{Rsd|cot\theta=2.5} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \frac{0.9d}{s} \cdot \text{sen}\alpha \cdot (\text{cot}\alpha + 2.5)$$

$$\frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Sd}}{0.9 \cdot d \cdot f_{yd} \cdot (\text{cot}\alpha + 2.5) \cdot \text{sen}\alpha}$$

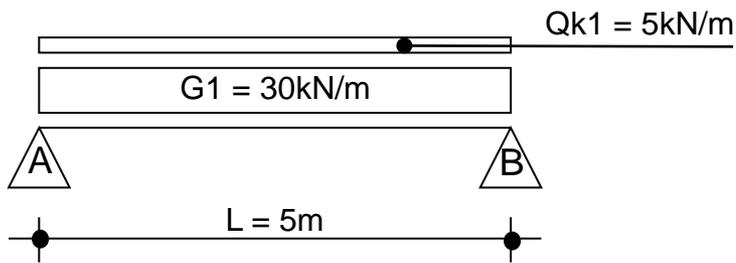
$A_{sw}$   
 $s$

area dell'armatura trasversale

interasse tra due armature trasversali consecutive

# S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2018)

## Esempio di VERIFICA a taglio (SLU)



### Combinazione di calcolo delle azioni

$$\gamma_{G1} G_1 + \gamma_{Q1} Q_{k1} = 1.3 \cdot 30 + 1.5 \cdot 5 = 46.5 \text{ kN/m}$$

### Analisi delle sollecitazioni

$$V_{sd}(A, B) = (\gamma_{G1} G_1 + \gamma_{Q1} Q_{k1}) \cdot L / 2 = (1.3 \cdot 30 + 1.5 \cdot 5) \cdot 5 / 2 = 116.25 \text{ kN}$$

### Resistenze di calcolo

$$\text{cls: } f_{cd} = \alpha_{cc} f_{ck} / \gamma_C = 0.85 \cdot 20 / 1.5 = 11.3 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{acciaio: } f_{yd} = f_{yk} / \gamma_S = 450 / 1.15 = 391.3 \text{ N/mm}^2$$

### *Dati del problema:*

*sezione trave: rettangolare b=300mm;  
H=400mm*

*classe di resistenza cls: C20/25  
(f<sub>ck</sub>=20N/mm<sup>2</sup>)*

*tipo armatura resistente a taglio: staffe  
verticali (α=90°)*

*area staffe: Ø8 passo (s) 20cm a due braccia  
(A<sub>sw</sub>=2 x 50mm<sup>2</sup>=100mm<sup>2</sup>)*

*acciaio per c.a.: B450C (f<sub>yk</sub>=450N/mm<sup>2</sup>)*

# S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2018)

determinazione della cotangente dell'angolo di inclinazione  $\theta$  delle bielle di cls

$$V_{Rcd} = V_{Rsd} \Rightarrow \cot^2 \theta = \frac{s \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f'_{cd}}{A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \sin \alpha} - 1 \Rightarrow \cot \theta = 3.10$$

controllo del rispetto del limite di normativa e determinazione del taglio resistente  $V_{Rd}$

caso a):  $1 \leq \cot \theta \leq 2.5 \Rightarrow V_{Rd} = V_{Rcd} = V_{Rsd}$

caso b):  $\cot \theta > 2.5 \Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rsd|_{\cot \theta = 2.5}}; V_{Rcd|_{\cot \theta = 2.5}})$

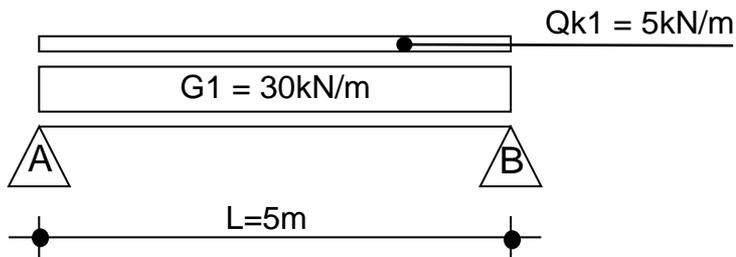
caso c):  $\cot \theta < 1 \Rightarrow V_{Rd} = \min(V_{Rsd|_{\cot \theta = 1.0}}; V_{Rcd|_{\cot \theta = 1.0}})$

$\cot \theta = 3.10 > 2.5 \Rightarrow \text{caso 2}$

$V_{Rd} = V_{Rsd|_{\cot \theta = 2.5}} = 207.96 \text{ kN} > 116.25 \text{ kN} = V_{Sd} \Rightarrow \text{VERIFICATO}$

# S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2018)

## Esempio di PROGETTO a taglio (SLU)



### *Dati del problema:*

*sezione trave: rettangolare  $b=300\text{mm}$ ;  
 $H=500\text{mm}$*

*classe di resistenza cls: C20/25  
( $f_{ck}=20\text{N/mm}^2$ )*

*tipo armatura resistente a taglio: staffe  
verticali*

*acciaio per c.a.: B450C ( $f_{yk}=450\text{N/mm}^2$ )*

### Combinazione di calcolo delle azioni

$$\gamma_{G1} G_1 + \gamma_{Q1} Q_{k1} = 1.3 \cdot 30 + 1.5 \cdot 5 = 46.5 \text{ kN/m}$$

### Analisi delle sollecitazioni

$$V_{sd}(A, B) = (\gamma_{G1} G_1 + \gamma_{Q1} Q_{k1}) \cdot L/2 = (1.3 \cdot 30 + 1.5 \cdot 5) \cdot 5/2 = 116.25 \text{ kN}$$

### Resistenze di calcolo

cls:  $f_{cd} = \alpha_{cc} f_{ck} / \gamma_C = 0.85 \cdot 20 / 1.5 = 11.3 \text{ N/mm}^2$

acciaio:  $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_S = 450 / 1.15 = 391.3 \text{ N/mm}^2$

# S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2018)

## controllo del caso di calcolo

### Caso 1

$$V_{Rcd|cot\theta=1} > V_{Sd} \Rightarrow 0.9 \cdot d \cdot b_w \cdot \alpha_C \cdot f'_{cd} \cdot (\cot\alpha + \cot\theta) / (1 + \cot^2\theta) = 371.18 > 116.25 \text{ kN} = V_{Sd}$$

### Caso 2

$$V_{Rcd|cot\theta=1.0} \geq V_{Sd} \geq V_{Rcd|cot\theta=2.5} \Rightarrow V_{Rcd|cot\theta=1.0} = 371.18, V_{Rcd|cot\theta=2.5} = 207.96 > V_{Sd} = 116.30 \text{ kN}$$

### Caso 3

$$V_{Sd} < V_{Rcd|cot\theta=2.5} \Rightarrow V_{Sd} = 116.25 < 207.96 \text{ kN} = V_{Rcd|cot\theta=2.5}$$

## Determinazione dell'armatura trasversale per il caso 3

$$V_{Sd} = V_{Rsd|cot\theta=2.5} = A_{sw} \cdot f_{yd} \cdot \frac{0.9d}{s} \cdot 2.5 \Rightarrow \frac{A_{sw}}{s} = \frac{V_{Sd}}{0.9 \cdot d \cdot f_{yd} \cdot 2.5}$$

# S.L.U.: SFORZI DI TAGLIO (NTC2018)

dimensionamento dell'armatura trasversale (ipotesi: staffe  $\varnothing 8$  a due braccia  
( $A_{sw} = 2 \times 50\text{mm}^2 = 100\text{mm}^2$ ))

$$\frac{A_{sw}}{s} = 0.28 \Rightarrow s = \frac{A_{sw}}{0.28} = 357\text{mm}$$

## minimo da regolamento (NTC18)

Area staffe minima:

$$A_{sw} = 1.5 \times b_w = 1.5 \times 300 = 450\text{mm}^2/\text{m}$$

Minimo 3 staffe per metro

Passo staffa massimo  $0.8 \times d =$

→ **s = 220mm**

→ **s = 330mm**

→ **s = 416mm**

**S<sub>min</sub> =  
220mm**