



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA BASILICATA**  
**Scuola di Ingegneria**



**Corso di**  
***TECNICA DELLE COSTRUZIONI***

**LA TORSIONE NELLE STRUTTURE IN C.A.**  
**Aspetti generali e verifica dello Stato Limite Ultimo**

Docente:

Prof. Ing. Angelo MASI

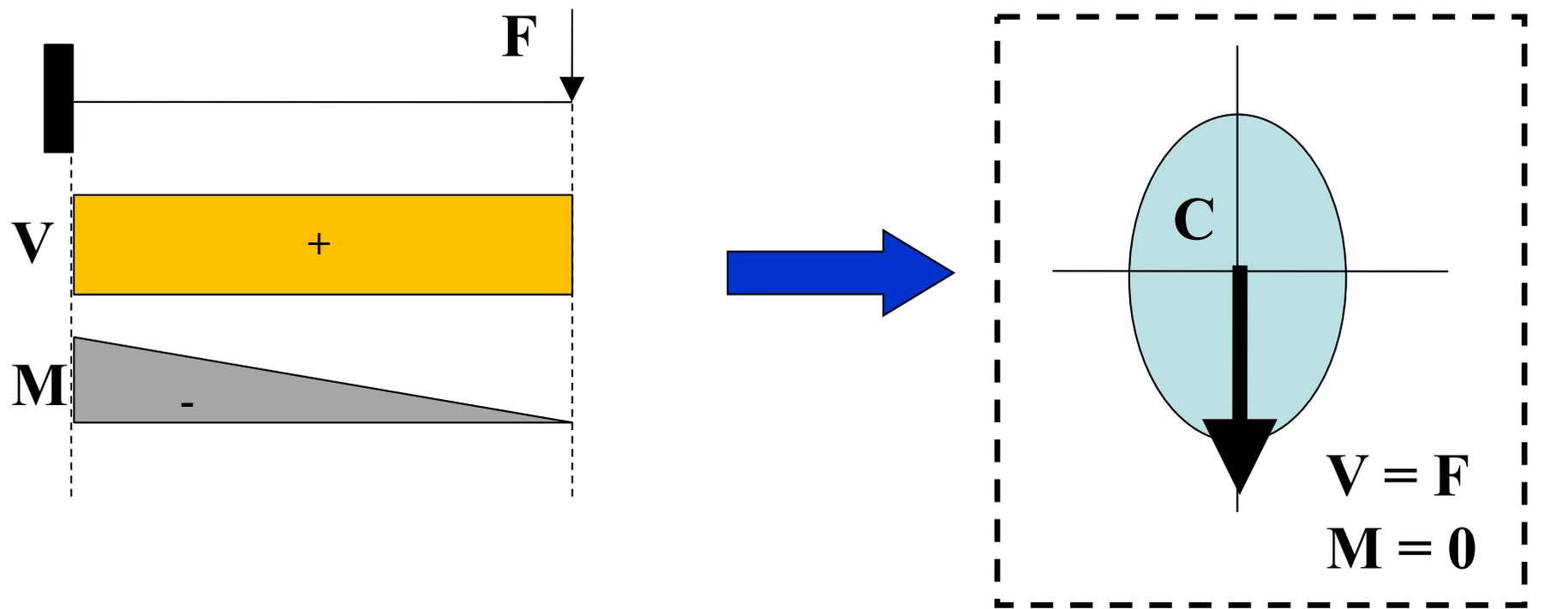
Collaboratori:

Ing. Giuseppe VENTURA

Ing. Vincenzo MANFREDI

## ....richiamiamo la sollecitazione di TAGLIO

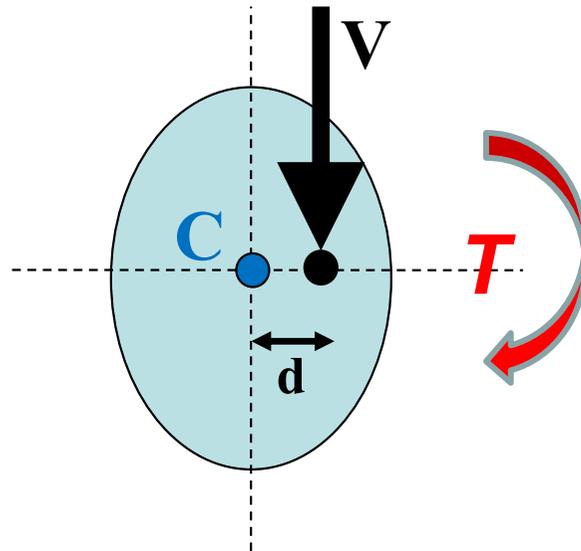
Una sezione di una trave risulta sollecitata a solo **taglio V** se, in assenza di momento flettente, la risultante delle azioni esterne  $F$  appartiene al piano della sezione e passa per un punto caratteristico  $C$  detto **CENTRO DI TAGLIO**



# La sollecitazione di TORSIONE

---

La sollecitazione di TORSIONE si presenta quando l'azione applicata NON passa per il **centro di taglio C** della sezione.

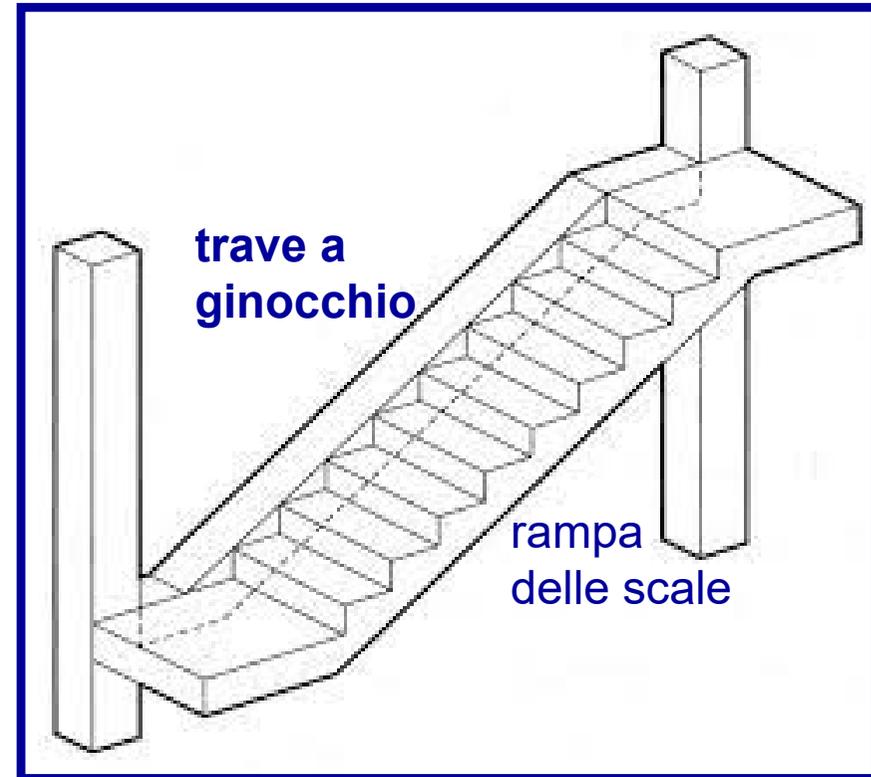


Momento torcente  
 $T = V d$

- La TORSIONE è sempre accompagnata da flessione e taglio.

# La sollecitazione di TORSIONE

- La sollecitazione di TORSIONE viene usualmente trascurata nelle verifiche
- Se ne tiene conto solo in alcuni casi per la verifica specifica di elementi caratteristici per i quali tale sollecitazione non è trascurabile.
- La torsione viene considerata per verifica delle **travi a ginocchio**, elementi strutturali necessari per sostenere le rampe del corpo scala.



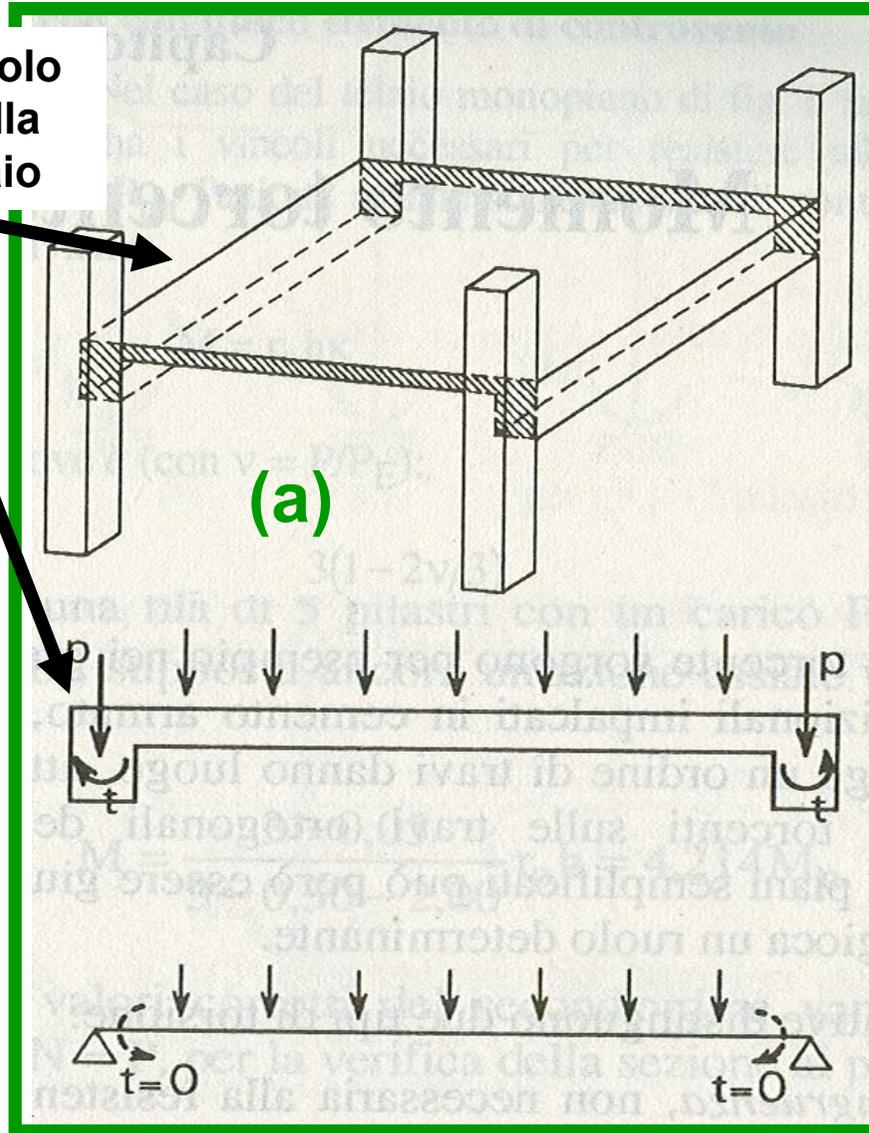
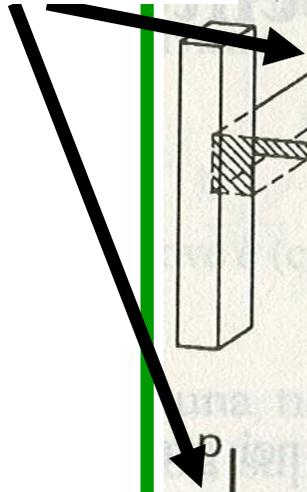
# TORSIONE: primaria e secondaria

---

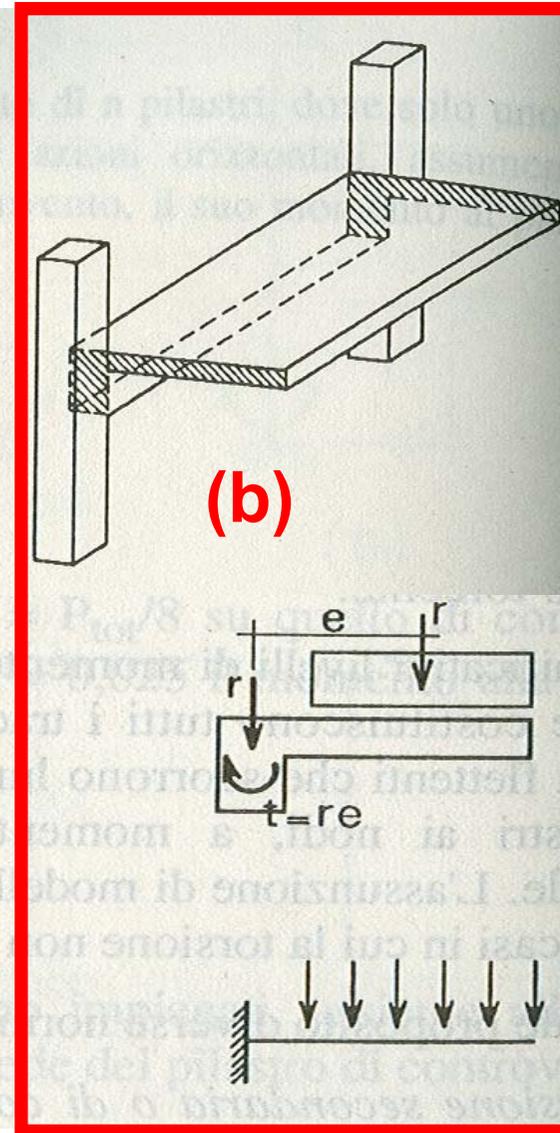
- Qualora l'equilibrio statico di una struttura dipende dalla resistenza torsionale degli elementi che la compongono, è necessario un calcolo completo che consideri la torsione nei riguardi sia degli stati limite ultimi che di esercizio (**Torsione primaria**).
- Qualora, in **strutture iperstatiche**, la torsione insorge solo per esigenze di compatibilità e la stabilità della struttura NON dipende dalla resistenza torsionale, non è generalmente necessario considerare la torsione allo stato limite ultimo (**Torsione secondaria**).
- Nei casi in cui la torsione non è essenziale per la stabilità, possono comunque essere richiesti adeguati accorgimenti per limitare un'eccessiva fessurazione allo stato limite d'esercizio (valori minimi di staffe e ferri longitudinali)

# TORSIONE: primaria e secondaria

Azione di vincolo esercitata dalla trave sul solaio



**Torsione secondaria (a)  
o di congruenza**



**Torsione primaria (b)  
o di equilibrio**

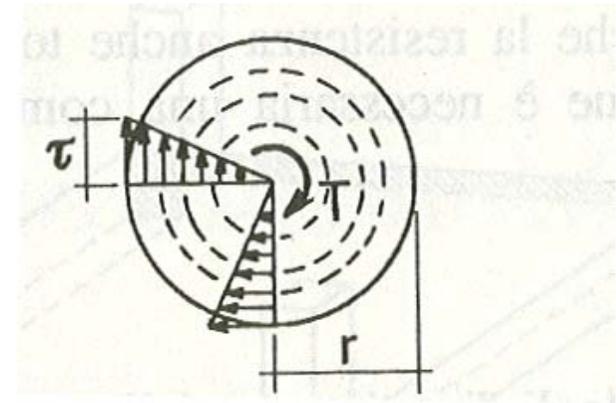
# TORSIONE: diagramma tensioni tangenziali

---

- La legge di distribuzione delle tensioni tangenziali dovute alla torsione varia con la forma della sezione.
- Non si è in grado di stabilire, anche in via approssimata, una relazione che possa essere valida per qualsiasi forma.
- Nel seguito si esaminano le espressioni per valutare la distribuzione delle tensioni tangenziali ed in particolare del valore max  $\tau_{max}$ , per le sezioni di più comune impiego, ossia:
  - circolare (piena e cava)
  - rettangolare
  - anulare
- L'ipotesi di base è di materiale elastico, omogeneo ed isotropo.

# TORSIONE: sezione circolare

A partire dalla teoria di De Saint-Venant, per azione di un momento torcente  $T$ , in una sezione circolare in fase elastica si originano tensioni tangenziali di intensità crescente verso l'esterno della sezione.

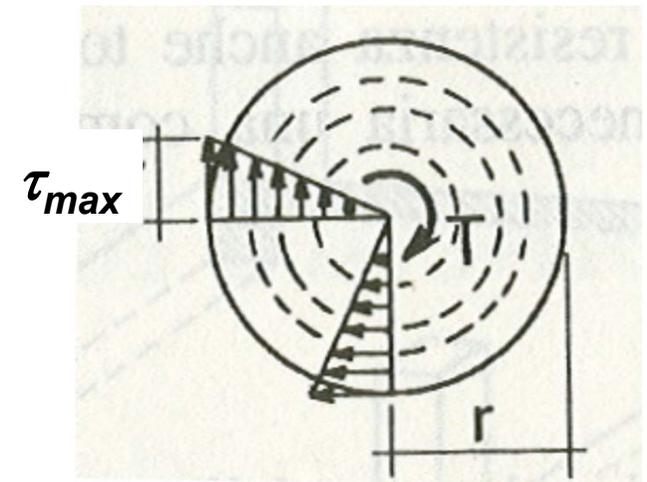


Definito il modulo di resistenza torsionale della sezione  $W_t$

$$W_t = \frac{\pi \cdot r^3}{2}$$

La massima tensione prodotta all'estremo vale:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t} = \frac{2 T}{\pi \cdot r^3}$$



# TORSIONE: sezione circolare

La rotazione  $d\phi$  delle parti terminali di un concio elementare  $dx$  rispetto all'asse baricentrico per effetto di  $T$  vale:

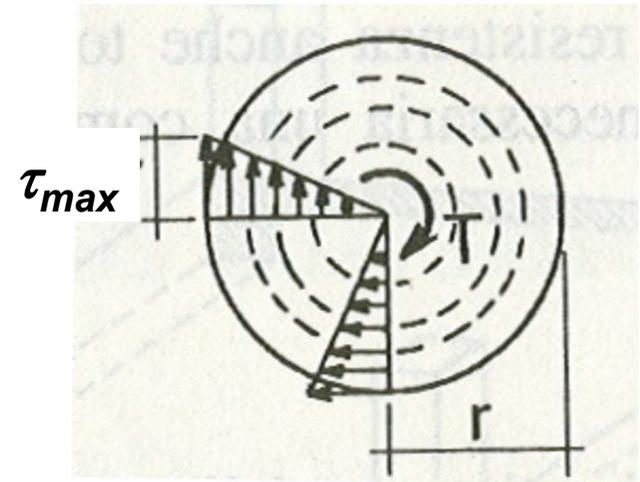
$$d\phi = \frac{T}{GJ} dx$$

in cui:

- $G$  è il modulo elastico tangenziale<sup>(1)</sup>
- $J$  è il momento di inerzia torsionale (momento di inerzia polare)

Per la sezione circolare vale:

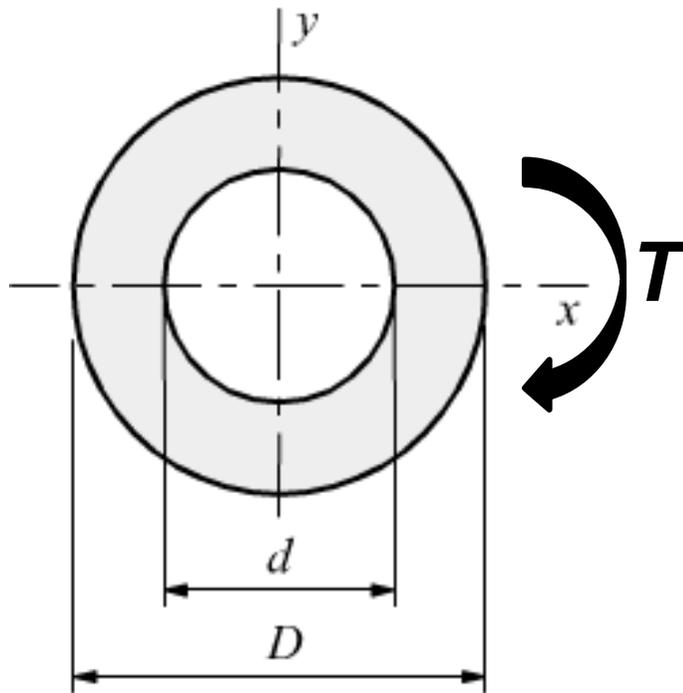
$$J = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$



<sup>(1)</sup>  $G = E / 2(1+\nu)$ , con  $\nu$  modulo di Poisson

# TORSIONE: sezione circolare (cava)

Nel caso di una sezione circolare cava di raggi  $r_e$  ( $= D/2$ ) e  $r_i$  ( $= d/2$ ), rispettivamente esterno ed interno, si ha:



$$\tau_{\max} = \frac{2 T r_e}{\pi \cdot (r_e^4 - r_i^4)}$$

- $r_i = d/2$
- $r_e = D/2$

# TORSIONE: sezione rettangolare

Nel caso di sezioni rettangolari, di lato minore  $b$  e maggiore  $a$  ( $b \leq a$ ,  $\beta = b/a \leq 1$ ), vale ancora:

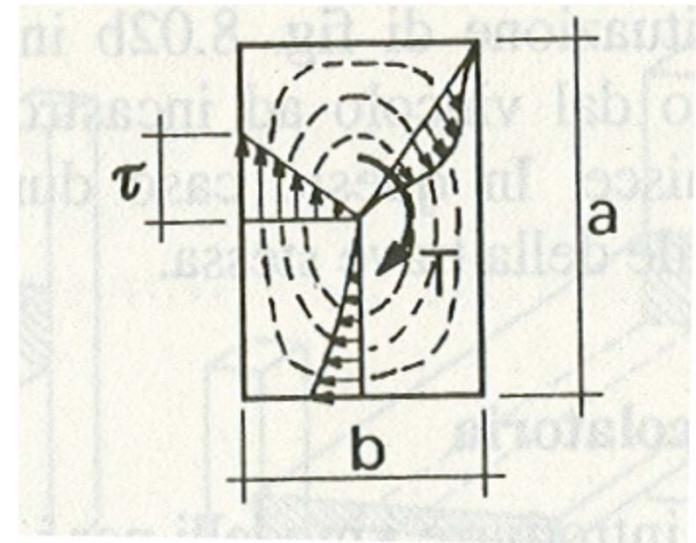
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_t}$$

nella quale il modulo di resistenza della sezione  $W_t$  vale:

$$W_t = k_1 \cdot a \cdot b^2$$

con

$$k_1 \cong \frac{1}{3 + 1.8 \cdot \beta}$$



Il momento di inerzia torsionale è pari a:

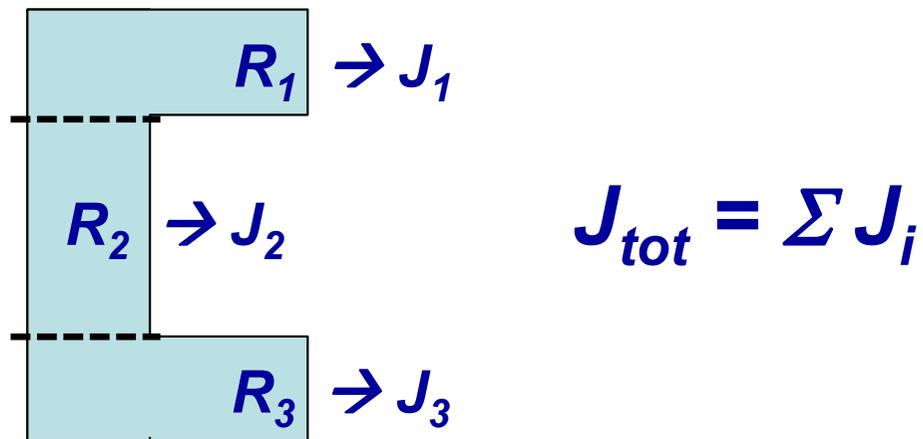
$$J = k_2 \cdot a \cdot b^3$$

$$k_2 \cong \frac{1}{3 + 4.1 \cdot \sqrt{\beta^3}}$$

# TORSIONE: sezioni composte da più rettangoli

---

In presenza di sezioni costituite da  $n$  rettangoli di spessore costante, il momento di inerzia torsionale totale  $J_{tot}$  si ottiene sommando i contributi calcolati per le singole parti  $J_i$ .



# TORSIONE: sezione anulare

Per le sezioni ad anello di piccolo spessore vale la **formula di Bredt**.

In base alla analogia idrodinamica il flusso  $q = \tau \cdot t$  è costante lungo l'intero perimetro della sezione.

Per l'equilibrio alla rotazione si ha:

$$T = \oint (\tau \cdot t \cdot r) ds$$

Ipotizzando che la tensione  $\tau$  si mantenga costante sullo spessore:

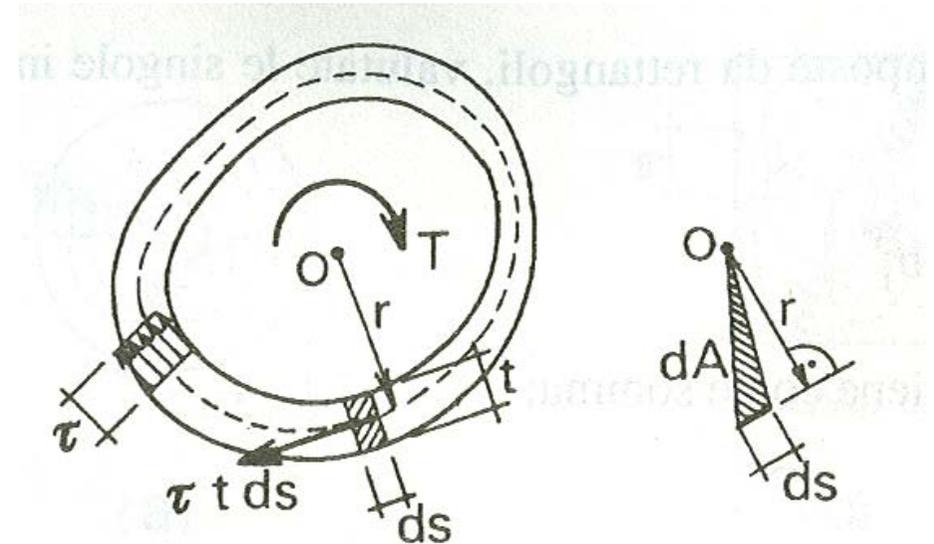
$$T = \tau \cdot t \oint r ds = 2q \int_A dA = 2qA$$

$$q = \tau \cdot t \quad (\text{con } t \text{ spessore della sezione anulare})$$

Da cui si ricava:

$$q = \frac{T}{2A}$$

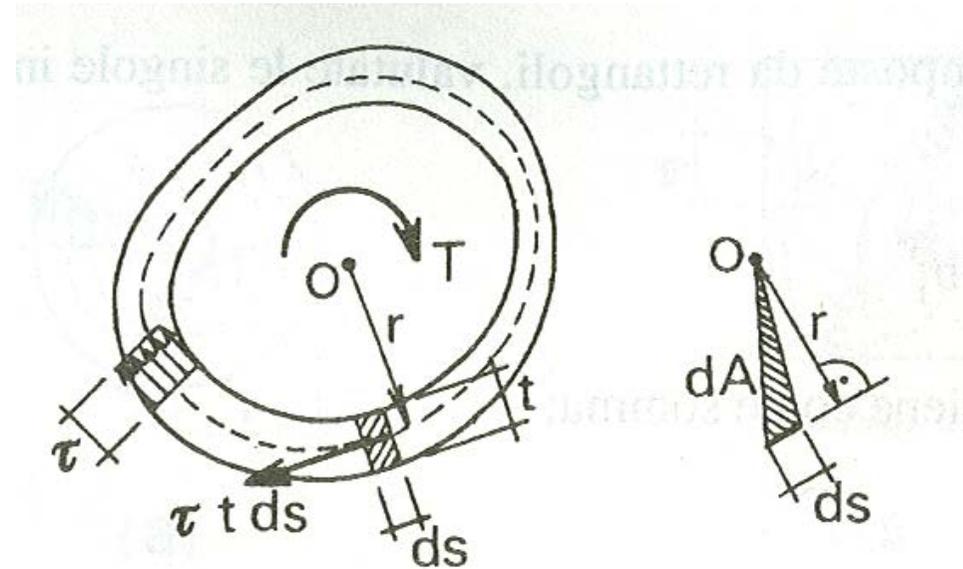
con  $A$  area racchiusa dalla linea media della sezione anulare.



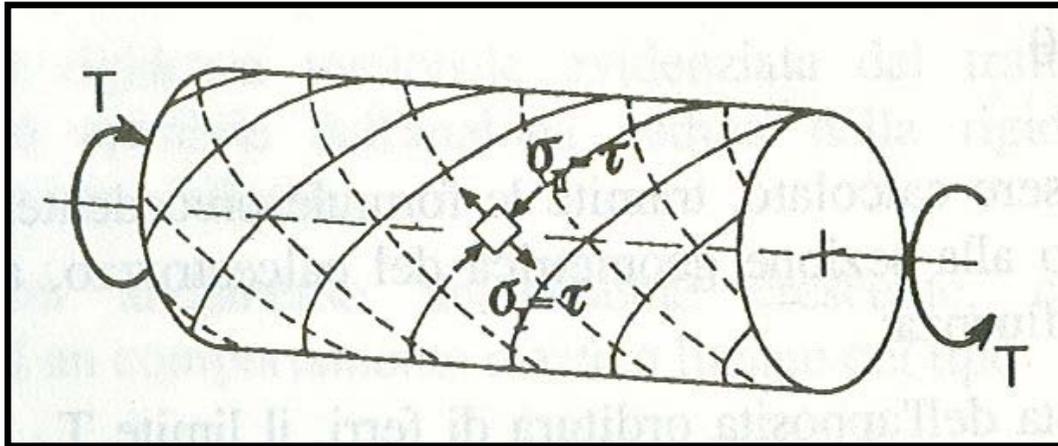
# TORSIONE: sezione anulare

Il valore della tensione tangenziale  $\tau_{max}$  secondo la formula di Bredt è valutato attraverso l'espressione:

$$\tau_{max} = \frac{T}{2 \cdot A \cdot t}$$

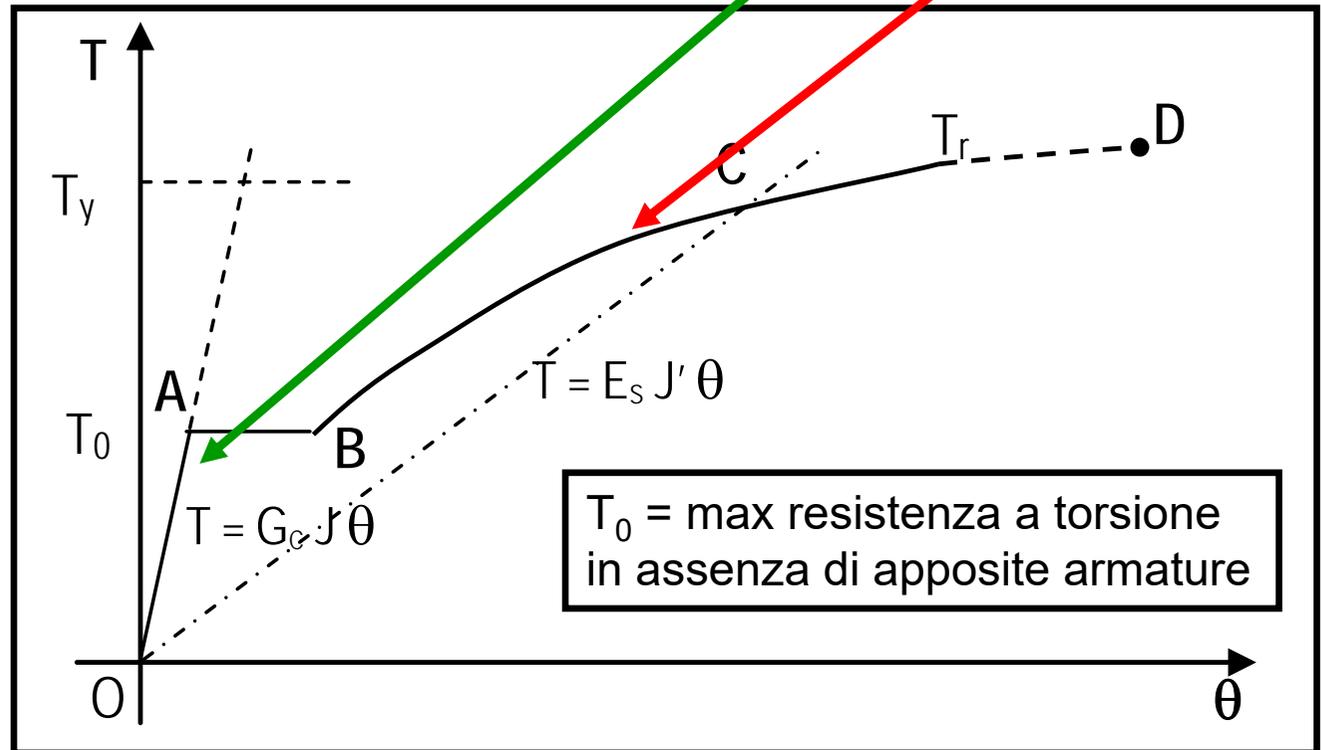


# S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

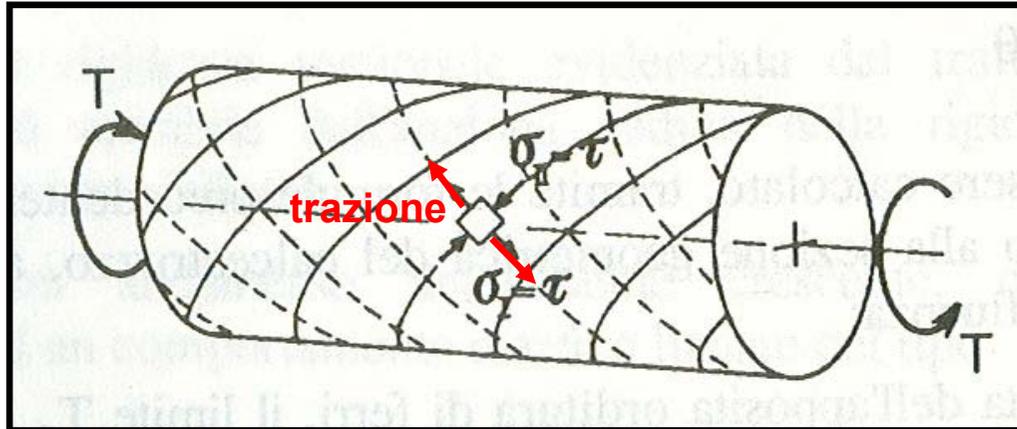


Le travi soggette a torsione mostrano un comportamento nettamente differente nei due stadi **non fessurato** e **fessurato**.

La caratteristica principale di tale differente comportamento è la forte riduzione della rigidezza torsionale che si verifica dopo la fessurazione, fino a diventare 1/4-1/5 del valore iniziale.

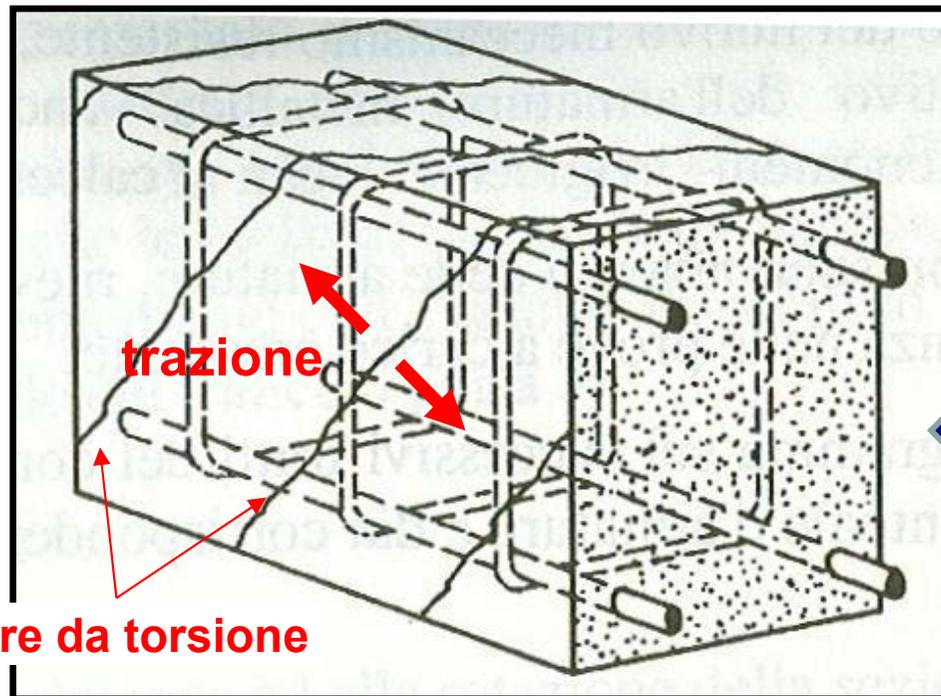


# S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)



Isostatiche di trazione e compressione in una trave sollecitata a torsione

(in presenza di sole tensioni tangenziali  $\tau$ , i valori delle **tensioni principali di trazione  $\sigma_1$**  e compressione  $\sigma_{II}$  coincidono (in modulo) con il valore della  $\tau$ )



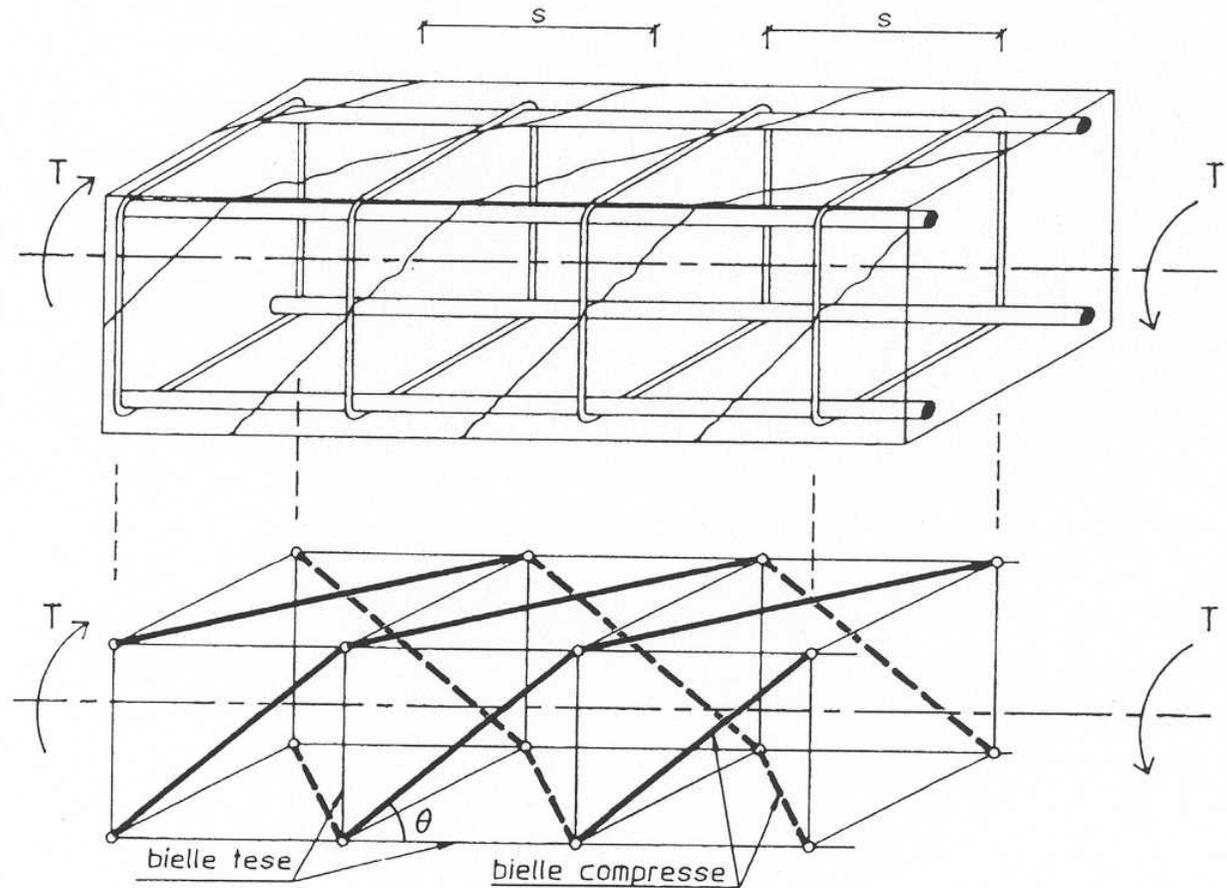
Andamento delle **fessurazioni** in una trave in c.a. (confrontare con l'andamento delle tensioni principali di trazione)

Fessure da torsione

# S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

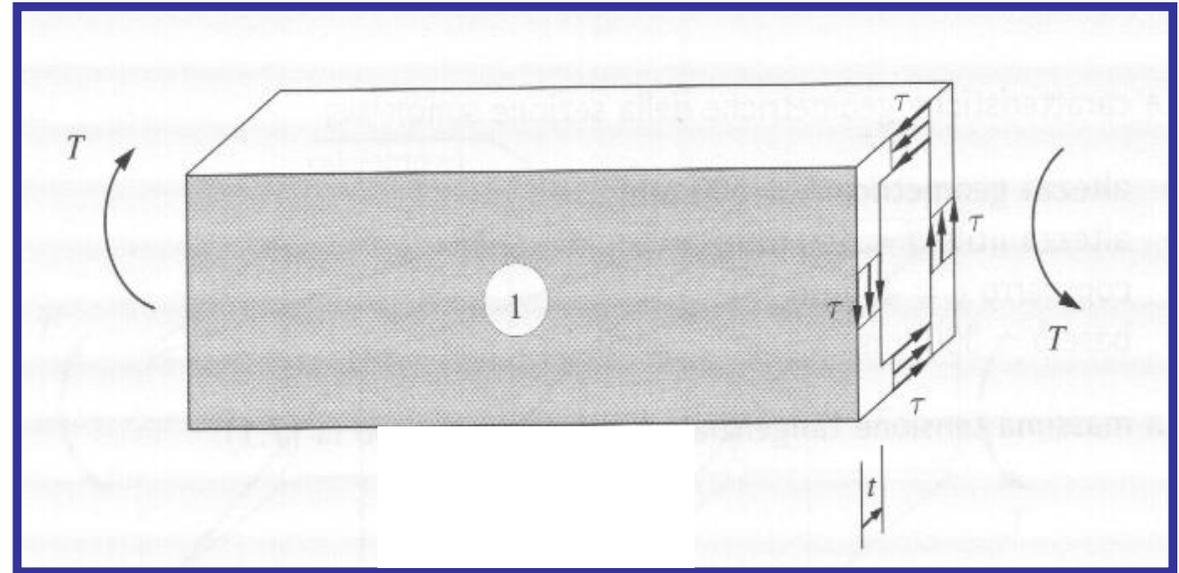
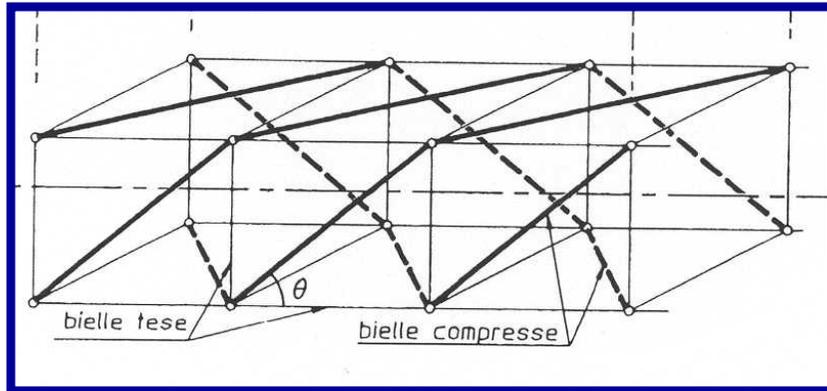
## TRALICCIO SPAZIALE costituito da:

- **bielle di calcestruzzo compresso** inclinate di un angolo  $\theta$
- **bielle di acciaio teso** costituite dalle:
  - **armature longitudinali**
  - **staffe** (disposte ortogonalmente alla linea d'asse)



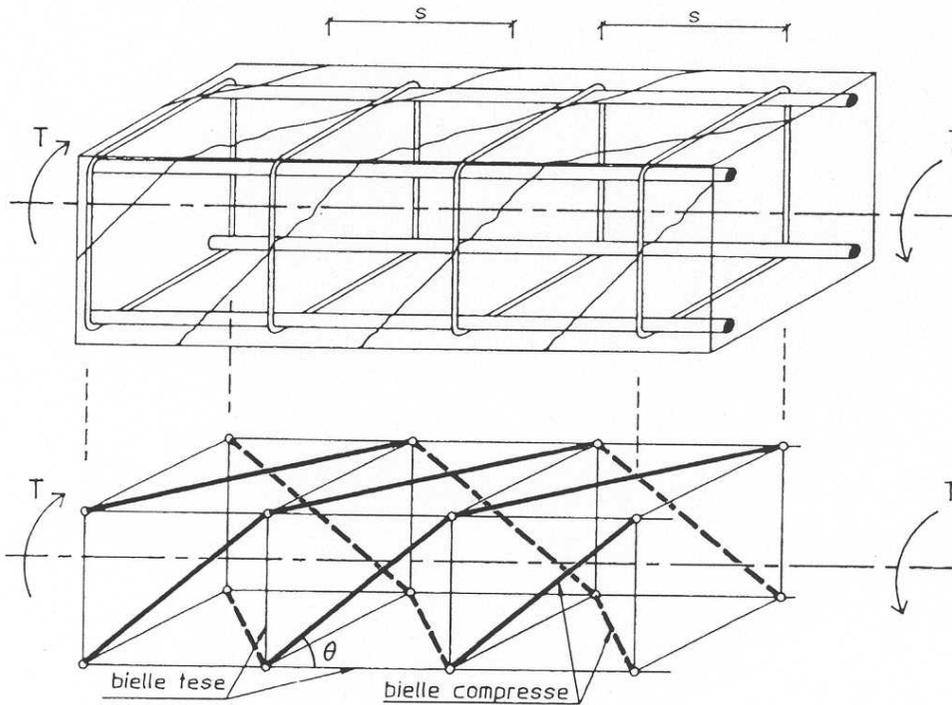
SCHEMATIZZAZIONE A TRALICCIO

# S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)



- Per la progettazione (e verifica) delle sezioni sottoposte a momento torcente si assume un **modello di calcolo con sezione cava a parete sottile di spessore  $t$** .
- Le tensioni tangenziali sono ipotizzate costanti all'interno dello spessore della parete.
- L'angolo  $\theta$  di inclinazione delle bielle di cls è considerato variabile, in funzione delle quantità di armatura longitudinale e trasversale (**modello a inclinazione variabile**)

# S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)



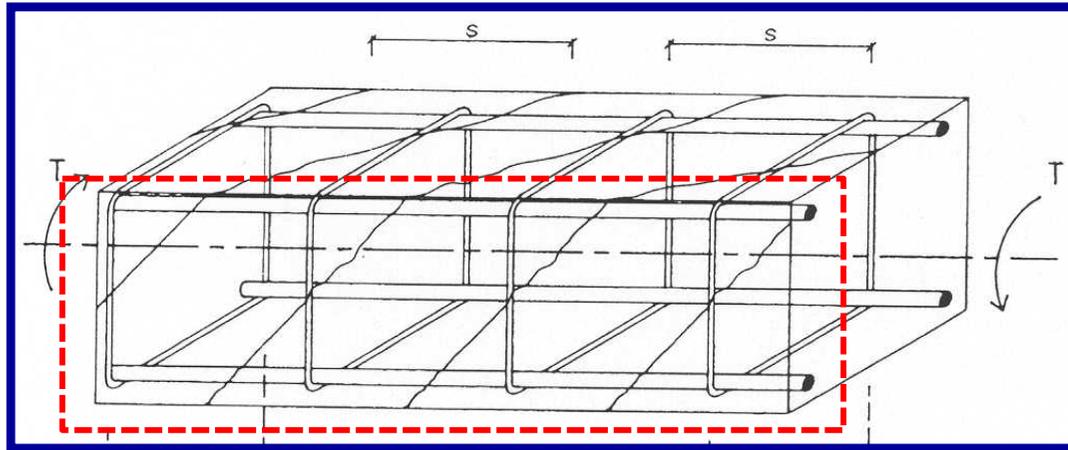
SCHEMATIZZAZIONE A TRALICCIO

Per la verifica a torsione vanno verificati tutti gli elementi del traliccio spaziale resistente.

Pertanto, è necessario valutare:

1. Sforzo nell'armatura longitudinale  $S_l$
2. Sforzo nell'armatura trasversale  $S_s$
3. Sforzo nel CLS compresso  $S_c$

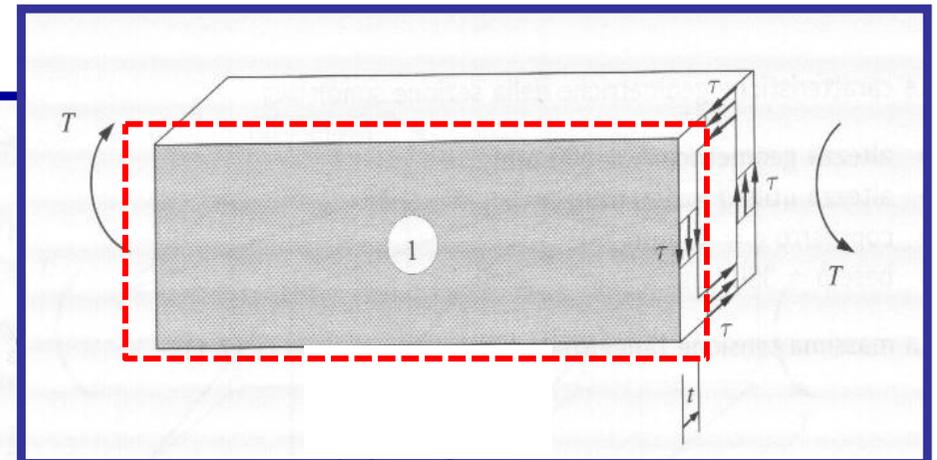
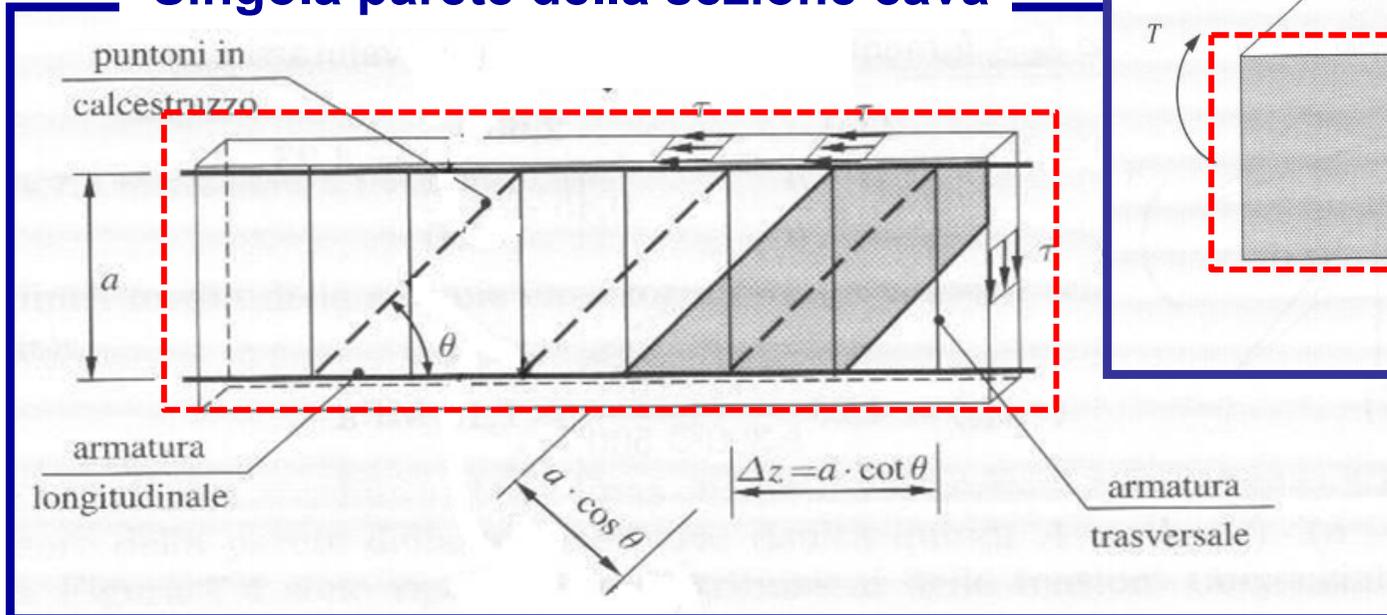
# S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)



Modello di calcolo per la valutazione degli sforzi nei **tre elementi del traliccio resistente:**

1. **Armature longitudinali**
2. **Armature trasversali**
3. **Bielle compresse di CLS**

## Singola parete della sezione cava



# S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

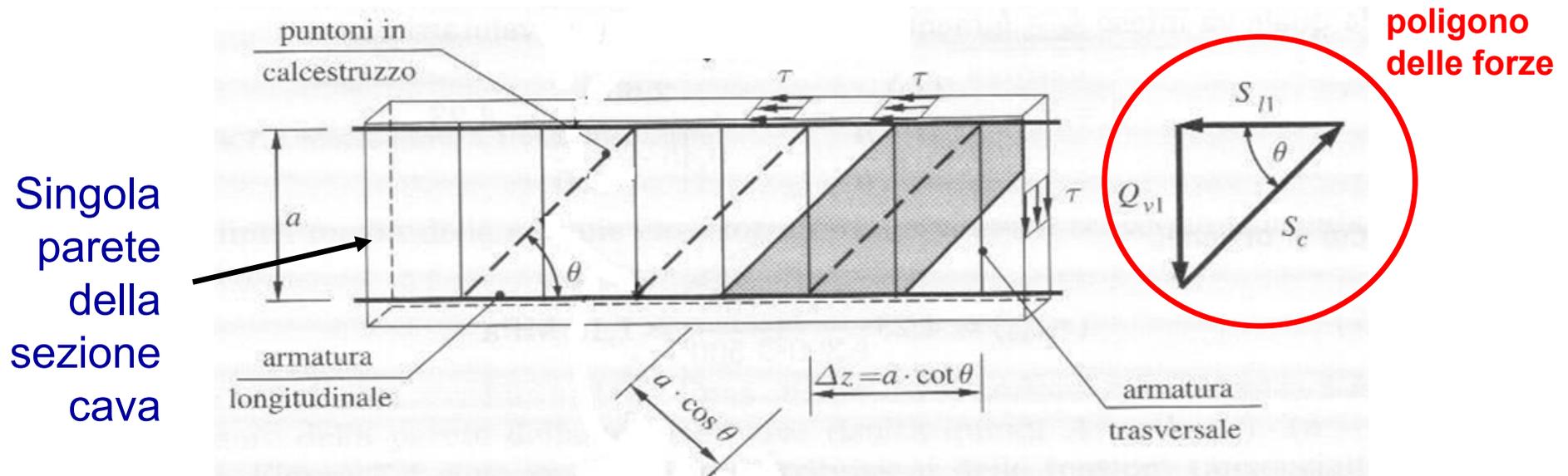
## 1. Valutazione dello sforzo nell'armatura longitudinale $S_l$ (1/2)

Lo sforzo di scorrimento  $Q_{v1}$  sulla **faccia verticale** di lunghezza  $a$  e spessore  $t$  vale:

$$Q_{v1} = \tau \cdot t \cdot a$$

Le altre componenti del **poligono delle forze** sono:

- $S_{l1}$  trazione nelle barre longitudinali nella singola parete
- $S_c$  compressione nel puntone di cls inclinato dell'angolo  $\theta$

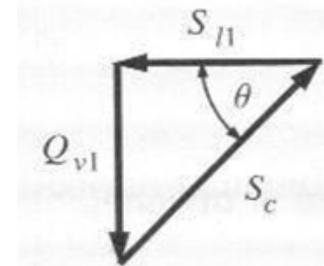


# S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

## 1. Valutazione dello sforzo nell'armatura longitudinale $S_l$ (2/2)

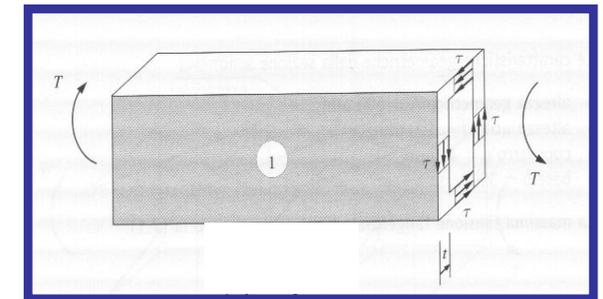
Lo sforzo di trazione nelle barre longitudinali in una singola parete vale:

$$S_{li} = Q_{vl} \cdot \cot \theta = \tau \cdot t \cdot a \cdot \cot \theta$$



Lo sforzo di trazione totale si ottiene sommando i contributi di ogni parete:

$$S_l = \sum_{i=1}^4 S_{li} = \cot \theta \cdot \sum_{i=1}^4 \tau \cdot t \cdot a_i$$



Definendo **perimetro medio p** il valore  $p = \sum_{i=1}^4 a_i$

e considerando la **formula di Bredt** ( $\tau = T/2At$ ), si ha:

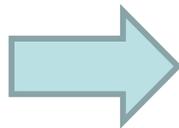
$$S_l = \tau \cdot t \cdot p \cdot \cot \theta = \frac{T}{2A} \cdot p \cdot \cot \theta$$

# S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

## 1. Valutazione del Momento torcente resistente delle barre longitudinali

Uguagliando il max valore di trazione sopportabile dalle barre longitudinali presenti  $S_{ld}$  (capacità) con lo sforzo  $S_I$  indotto dall'azione torcente (domanda) si ottiene il valore del momento torcente  $T_{Rld}$  che produce la crisi dell'armatura longitudinale:

$$S_{ld} = S_I$$



$$S_{ld} = f_{yd} \cdot A_{sl} = \frac{T_{Rld}}{2 \cdot A} \cdot p \cdot \cot \theta$$

$$T_{Rld} = f_{yd} \cdot A_{sl} \cdot \frac{2 \cdot A}{p} \cdot \frac{1}{\cot \theta}$$

***Momento torcente resistente  
delle barre longitudinali***

# S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

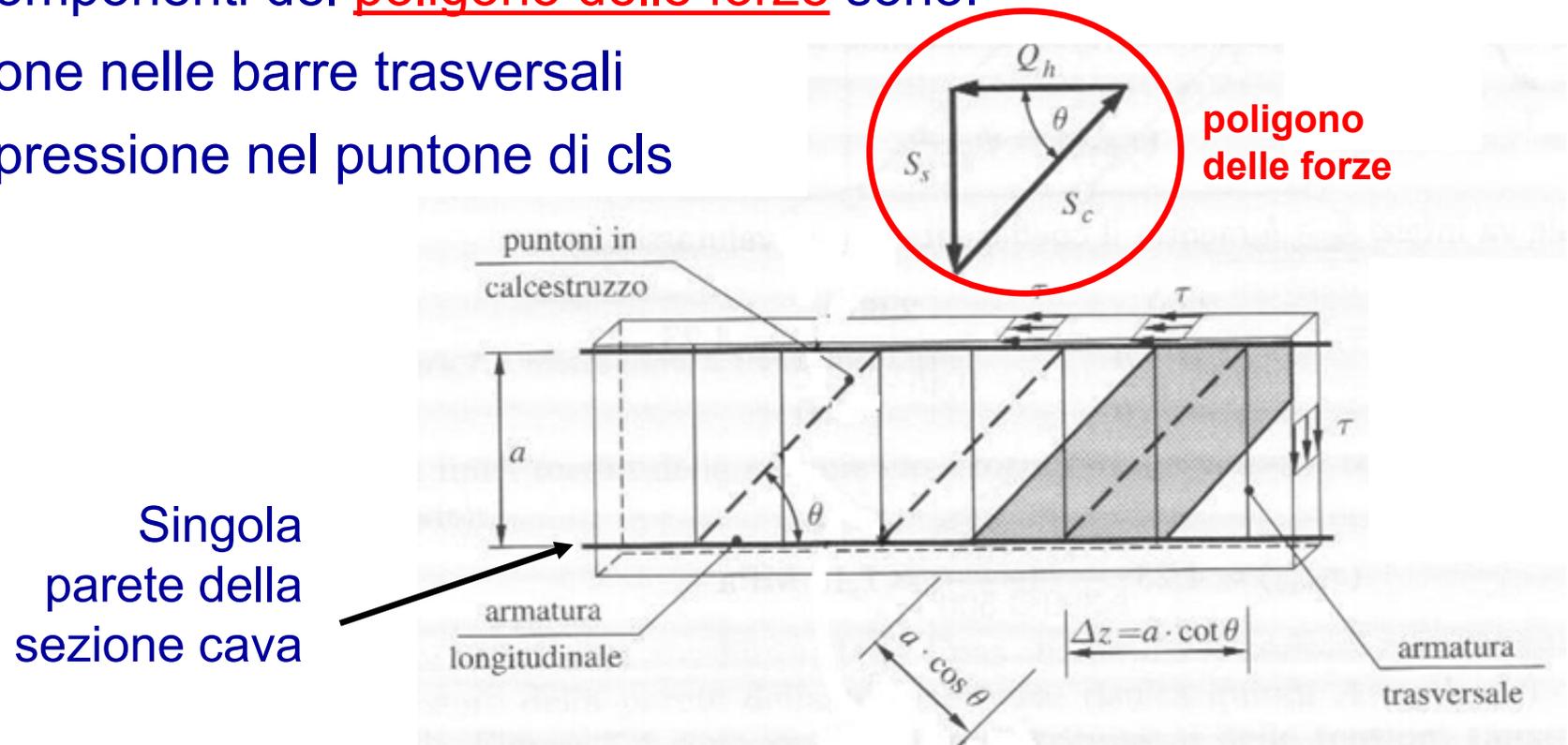
## 2. Valutazione dello sforzo nell'armatura trasversale $S_s$

Lo sforzo di scorrimento  $Q_h$  sulla **faccia orizzontale** vale:

$$Q_h = \tau \cdot t \cdot \Delta z$$

Le altre componenti del **poligono delle forze** sono:

- $S_s$  trazione nelle barre trasversali
- $S_c$  compressione nel puntone di cls

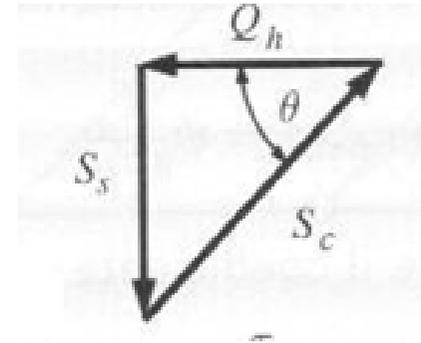


# S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

## 2. Valutazione del Momento torcente resistente delle armature trasversali

Lo sforzo di trazione  $S_s$  nelle armature trasversali è valutato attraverso:

$$S_s = Q_h \cdot \operatorname{tg}\theta = \tau \cdot t \cdot \Delta z \cdot \operatorname{tg}\theta = \frac{T}{2A} \cdot \Delta z \cdot \operatorname{tg}\theta$$



Uguagliando il massimo valore di trazione delle barre  $S_{sd}$  con lo sforzo  $S_s$  indotto dall'azione torcente si ottiene il valore del momento torcente  $T_{Rsd}$  che produce la crisi dell'armatura trasversale:

$$S_{sd} = f_{yd} \cdot \frac{A_s \cdot \Delta z}{s} = \frac{T_{Rsd}}{2 \cdot A} \cdot \Delta z \cdot \operatorname{tg}\theta$$

$$T_{Rsd} = f_{yd} \cdot A \cdot \frac{2 \cdot A_s}{s} \cdot \cot\theta$$

( $A_s \cdot \Delta z / s$  è l'area di armatura trasversale presente nel tratto  $\Delta z$ , con  $s$ =passo delle staffe)

**Momento torcente resistente delle armature trasversali**

# S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

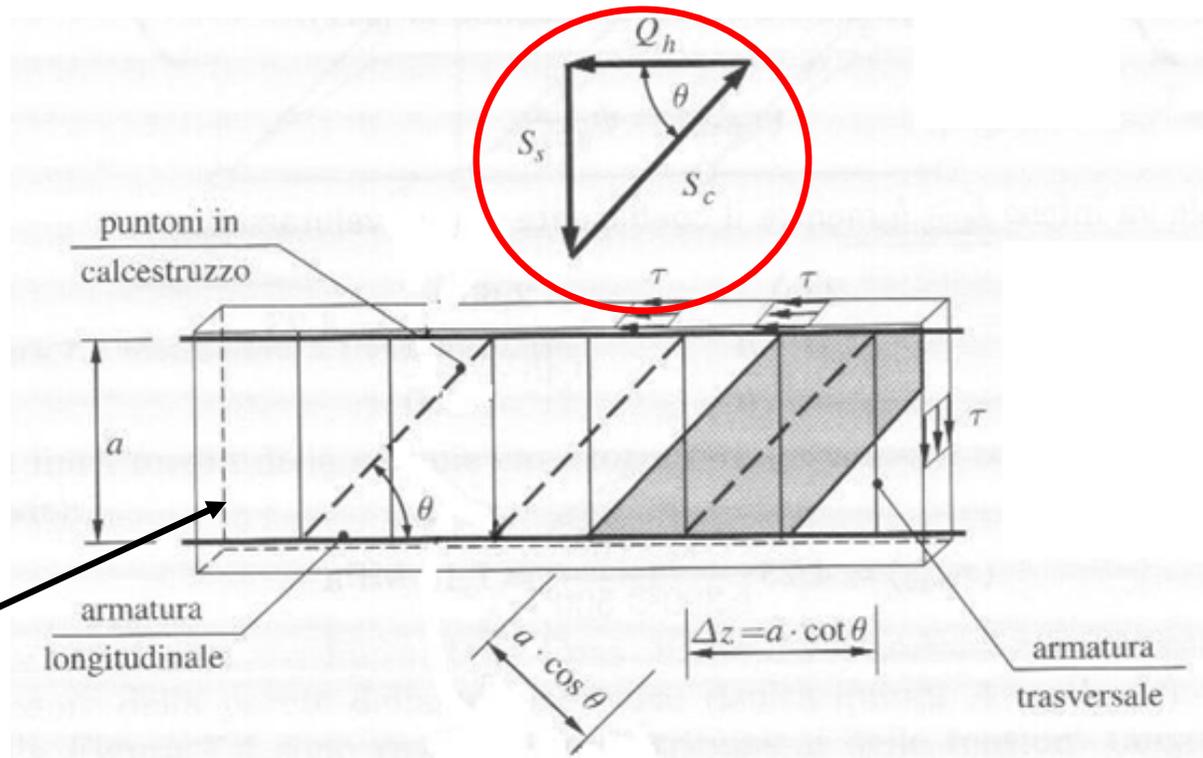
## 3. Valutazione dello sforzo di compressione delle bielle di cls $S_c$

La componente di compressione  $S_c$  del poligono di forze è pari a:

$$S_c = \frac{Q_h}{\cos \theta} = \frac{\tau \cdot t \cdot \Delta z}{\cos \theta} = \frac{\tau \cdot t \cdot a \cdot \cot \theta}{\cos \theta} =$$

$$= \frac{\tau \cdot t \cdot a}{\sin \theta} = \frac{T}{2A} \frac{a}{\sin \theta}$$

Singola parete  
della sezione cava



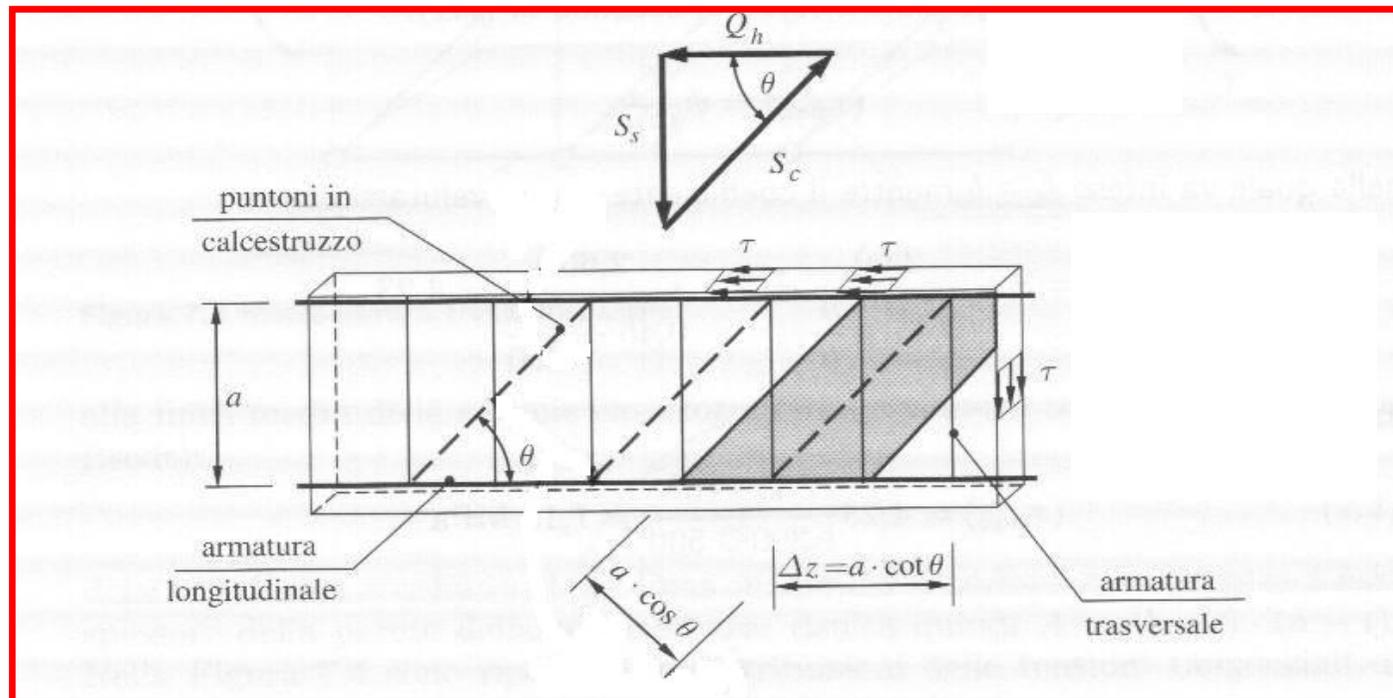
# S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

## 3. Valutazione dello sforzo di compressione delle bielle di cls $S_c$

La **capacità** del puntone compresso è valutabile con l'espressione (di derivazione sperimentale):

$$S_{cd} = \alpha_c v \cdot \sigma_{cd} \cdot t \cdot a \cdot \cos \theta$$

dove  $\alpha_c$  tiene conto degli effetti dovuti alla presenza di un eventuale sforzo assiale e  $v$  della reale distribuzione delle tensioni nella sezione della biella.



# S.L.U. TORSIONE (Traliccio spaziale resistente)

## 3. Valutazione del Momento torcente resistente delle bielle di CLS

Uguagliando il massimo valore di compressione delle bielle di cls  $S_{cd}$  (capacità) con lo sforzo indotto dall'azione torcente  $S_c$  (domanda) si ottiene il valore del momento torcente  $T_{Rcd}$  che produce la crisi della biella compressa:

$$S_{cd} = \alpha_c v \cdot \sigma_{cd} \cdot t \cdot a \cdot \cos \theta = \frac{T_{Rcd}}{2A} \frac{a}{\sin \theta}$$

$$T_{Rcd} = 2 \cdot A \cdot \alpha_c v \cdot \sigma_{cd} \cdot t \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta = 2 \cdot A \cdot \alpha_c v \cdot \sigma_{cd} \cdot t \cdot \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

***Momento torcente resistente delle bielle compresse***

La massima resistenza si ottiene per una inclinazione  $\theta = 45^\circ$ .

# Verifica S.L.U. TORSIONE

---

La verifica dello SLU per sollecitazioni di torsione è soddisfatta se:

$$T_{Rd} \geq T_{Ed}$$

dove  $T_{Ed}$  è il valore di calcolo del momento torcente agente e  $T_{Rd}$  è il momento torcente resistente pari al minimo tra i valori della resistenza delle:

- bielle di cls compresse ( $T_{Rcd}$ ),
- barre longitudinali ( $T_{Rld}$ ),
- armature trasversali ( $T_{Rsd}$ )

$$T_{Rd} = \min (T_{Rcd}, T_{Rld}, T_{Rsd})$$

# Verifica S.L.U. TORSIONE (riepilogo)

---

La verifica dello SLU per sollecitazioni di torsione è soddisfatta se:

$$T_{Rd} \geq T_{Ed}$$

$$T_{Rd} = \min (T_{Rcd}, T_{Rld}, T_{Rsd})$$

$$T_{Rld} = f_{yd} \cdot A_{sl} \cdot \frac{2 \cdot A}{p} \cdot \frac{1}{\cot \theta}$$

*Momento torcente resistente delle barre longitudinali*

$$T_{Rsd} = f_{yd} \cdot A \cdot \frac{2 \cdot A_s}{s} \cdot \cot \theta$$

*Momento torcente resistente delle armature trasversali*

$$T_{Rcd} = 2 \cdot A \cdot \alpha_c \nu \cdot \sigma_{cd} \cdot t \cdot \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta}$$

*Momento torcente resistente delle bielle compresse*

# S.L.U. TORSIONE (NTC2018)

## Momento torcente resistente delle **bielle di calcestruzzo** ( $T_{Rcd}$ )

La resistenza delle **bielle** si calcola attraverso la seguente espressione:

$$T_{Rcd} = 2 \cdot A \cdot t \cdot f'_{cd} \cdot \cot \theta / (1 + \cot^2 \theta)$$

$A$  area racchiusa nel perimetro medio  $u_m$

$t = A_c / u \geq 2c$  (per sezioni piene);

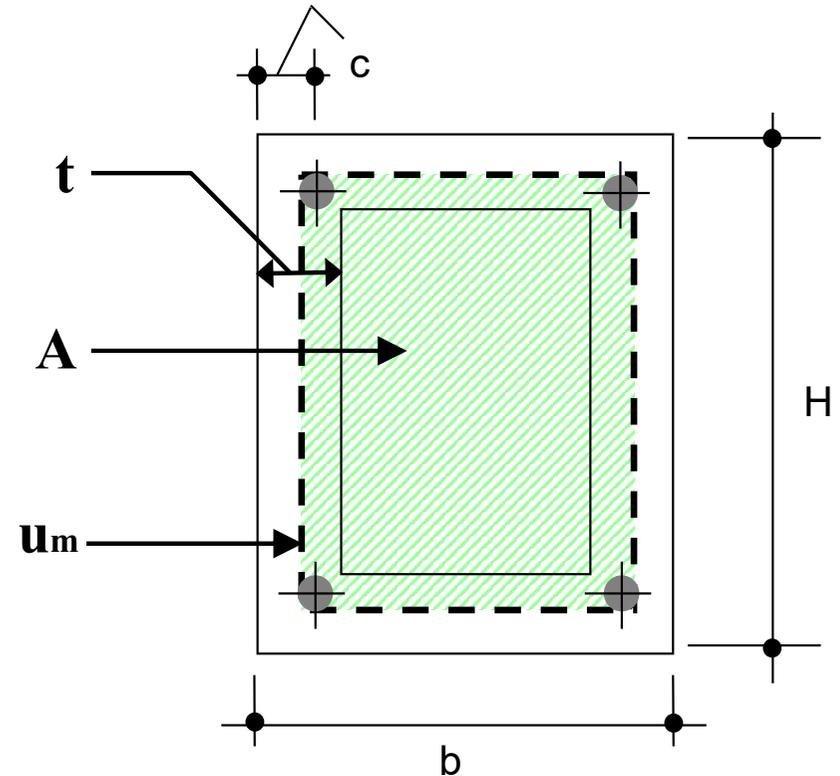
$A_c = b \times H$  area della sezione;

$u$  perimetro della sezione;

$A$  area racchiusa entro la fibra media del perimetro della sezione;

$f'_{cd}$   $f'_{cd}$  resistenza a compressione ridotta del calcestruzzo d'anima ( $f'_{cd} = 0,5 \times f_{cd}$ );

$\theta$  angolo di inclinazione delle bielle di cls con limitazione:  $1 \leq \cot \theta \leq 2.5$



**NOTA:** la tensione del cls è ridotta perché le bielle sono presso-inflesse

# S.L.U. TORSIONE (NTC2018)

Momento torcente resistente delle **armature trasversali e longitudinali** ( $T_{Rsd}$ ,  $T_{Rld}$ )

La resistenza delle **armature trasversali** si calcola attraverso la seguente espressione:

$$T_{Rsd} = 2 \cdot A \cdot \frac{A_s}{s} \cdot f_{yd} \cdot \cot \theta$$

La resistenza delle **armature longitudinali** si calcola attraverso la seguente espressione:

$$T_{Rld} = 2 \cdot A \cdot \frac{\sum A_l}{u_m} \cdot f_{yd} \cdot \frac{1}{\cot \theta}$$

$A_s$  è l'area della staffa;

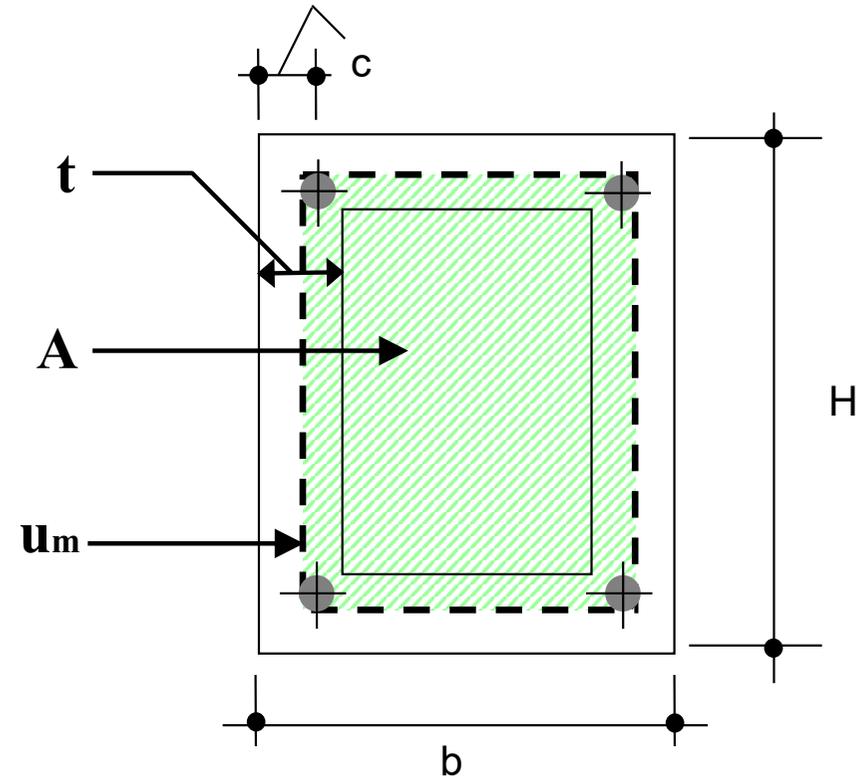
$u_m$  è il perimetro medio del nucleo resistente,

$s$  passo delle staffe;

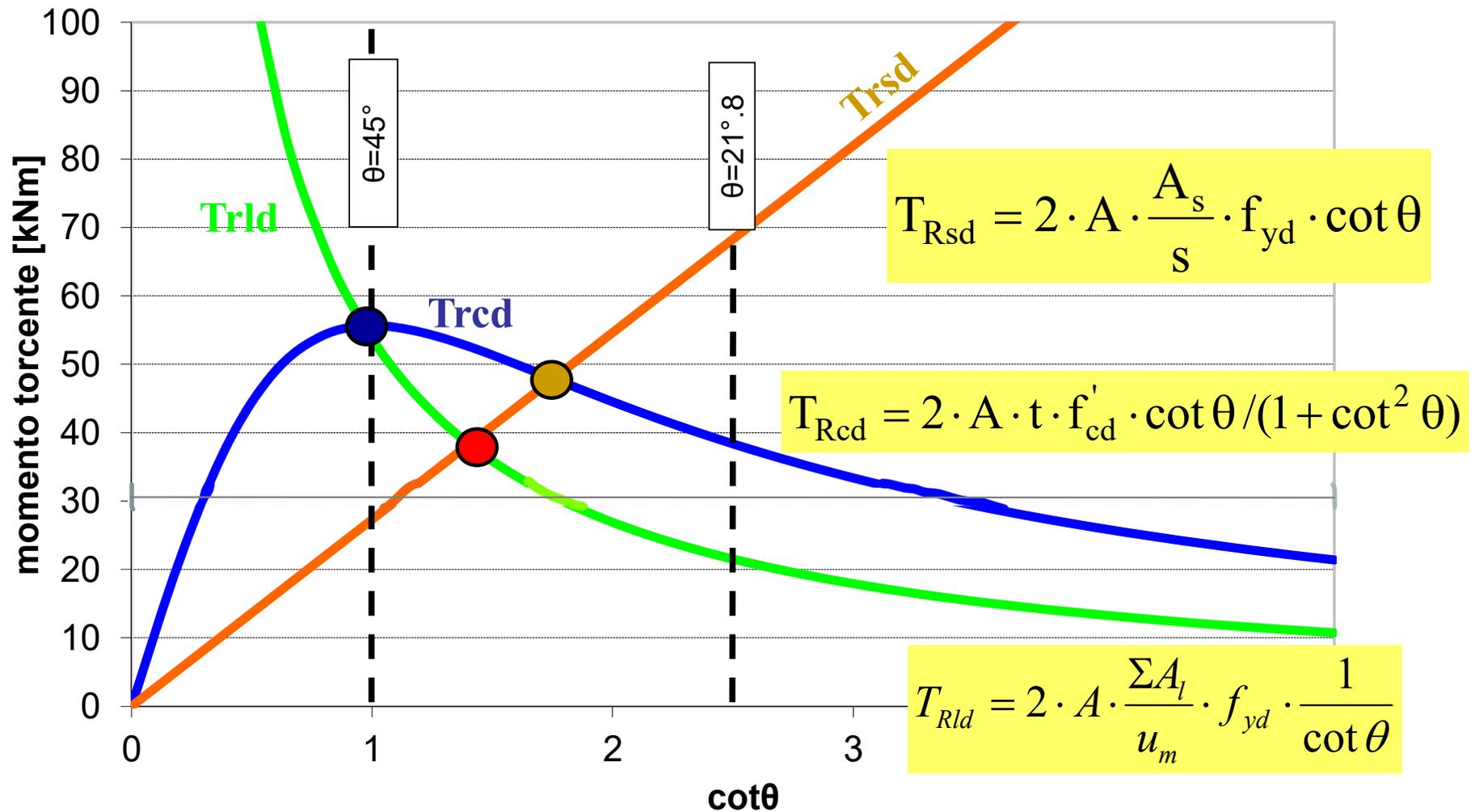
$\sum A_l$  area complessiva delle barre longitudinali;

$A$  area racchiusa nel perimetro medio della sezione cava

$\theta$  angolo di inclinazione delle bielle di cls con la limitazione:  $1 \leq \cot \theta \leq 2.5$



# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE



# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

---

## COMPORAMENTO A ROTTURA DELLE SEZIONI

Nelle sezioni in c.a. sottoposte a torsione sono possibili 3 diverse condizioni di verifica:

- **Snervamento simultaneo delle armature (staffe + barre longitudinali)**
- **Rottura delle bielle di cls e contemporaneo snervamento delle staffe**
- **Rottura delle bielle di cls e contemporaneo snervamento delle barre longitudinali**

# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

## CASO 1: ROTTURA SIMULTANEA DELLE ARMATURE (STAFFE + BARRE)

Il valore  $\cot\theta$  è determinato imponendo l'uguaglianza tra  $T_{Rsd}$  e  $T_{Rld}$

$$T_{Rsd} = 2 \cdot A \cdot \frac{A_s}{s} \cdot f_{yd} \cdot \cot\theta = T_{Rld} = 2 \cdot A \cdot \frac{\sum A_l}{u_m} \cdot f_{yd} \cdot \frac{1}{\cot\theta}$$

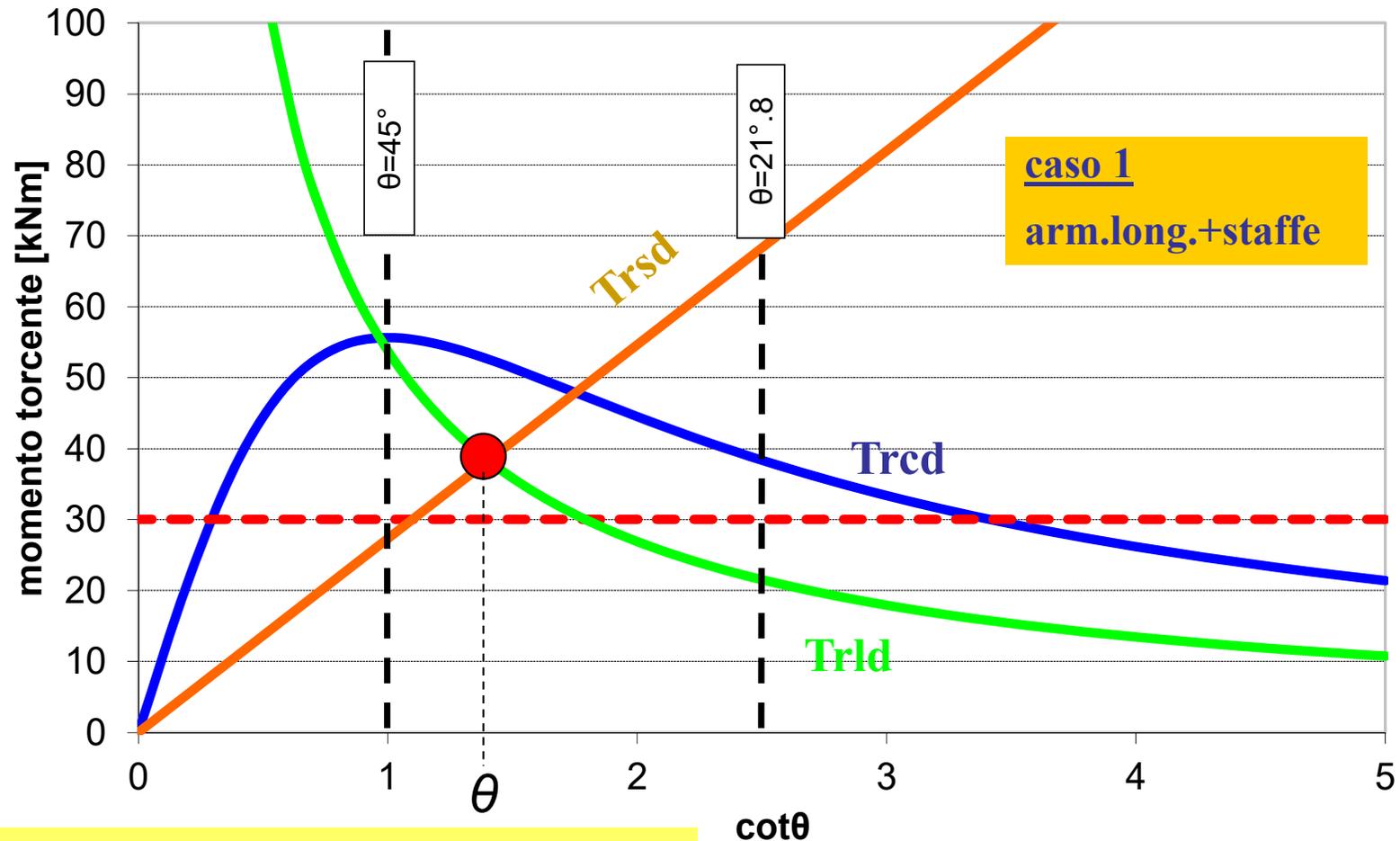
$$T_{Rld} = T_{Rsd} \Rightarrow \cot\theta = (a_1 / a_s)^{1/2} \quad \text{dove} \quad a_1 = \sum A_l / u_m \quad \text{e} \quad a_s = A_s / s$$

Se risulta che  $1 \leq \cot\theta \leq 2.5$  e  $T_{Rcd}(\cot\theta) \geq T_{Rld} = T_{Rsd}$

allora la **torsione resistente della sezione** ( $T_{Rd}$ ) è uguale alla torsione resistente delle staffe ovvero delle barre longitudinali ( $T_{Rld} = T_{Rsd}$ ) (**caso1**)

$$T_{Rd} = T_{Rld} = T_{Rsd}$$

# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE



caso 1  
arm.long.+staffe

$$T_{Rcd} = 2 \cdot A \cdot t \cdot f'_{cd} \cdot \cot \theta / (1 + \cot^2 \theta)$$

$$T_{Rld} = 2 \cdot A \cdot \frac{\sum A_l}{u_m} \cdot f_{yd} \cdot \frac{1}{\cot \theta}$$

--- Tsd = momento agente

$$T_{Rsd} = 2 \cdot A \cdot \frac{A_s}{s} \cdot f_{yd} \cdot \cot \theta$$

# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

---

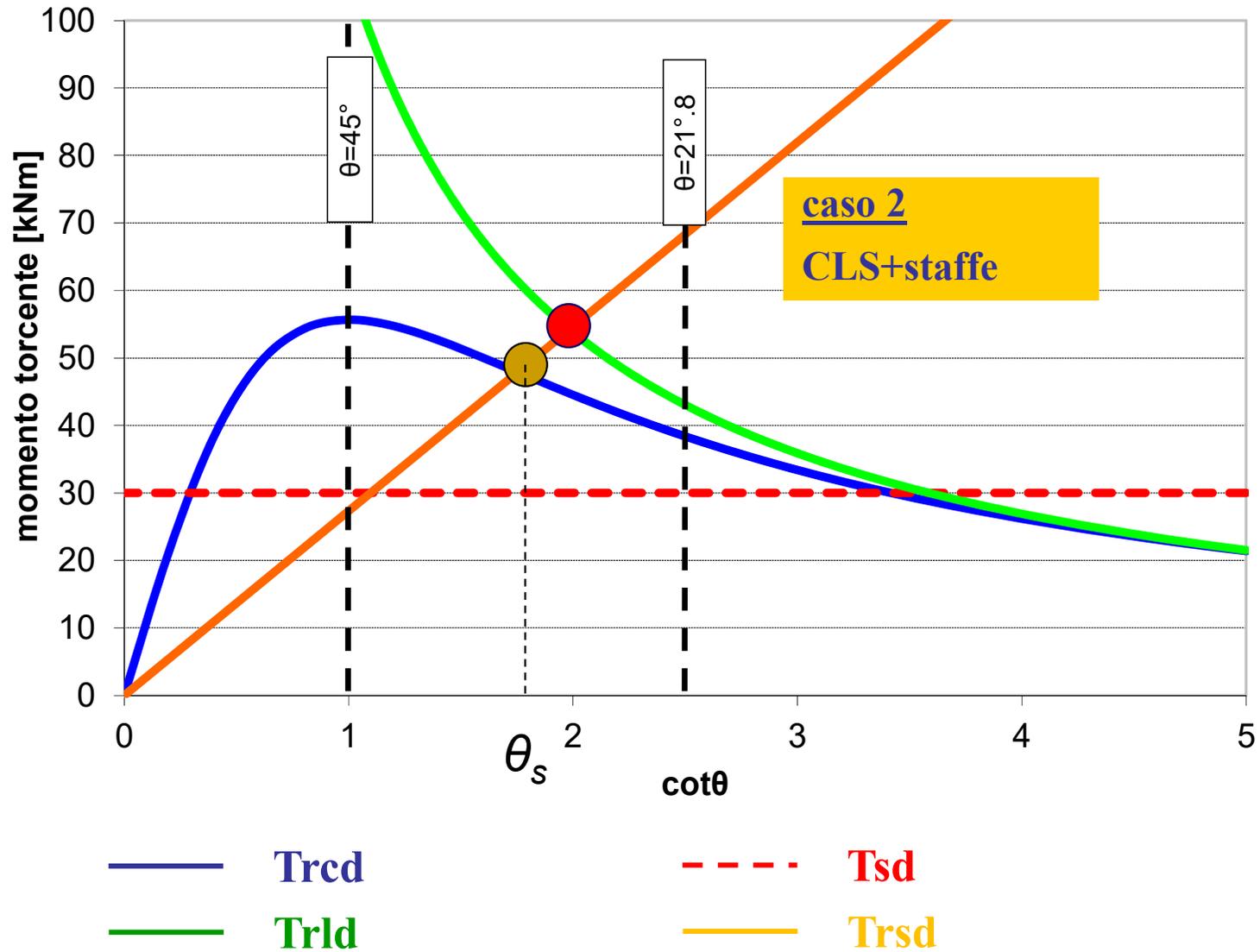
Se  $T_{Rcd}$  calcolato in corrispondenza del valore  $\cot\theta$  è minore di  $T_{Rsd}$  allora la crisi avviene per:

## CASO 2: ROTTURA DELLE BIELLE DI CLS E SNERVAMENTO DELLE STAFFE

Il valore  $\cot\theta_s$  è determinato imponendo l'uguaglianza tra  $T_{Rsd}$  e  $T_{Rcd}$

$$T_{Rcd} = T_{Rsd} \Rightarrow \cot\theta_s = \sqrt{\frac{t \cdot f'_{cd} \cdot s}{A_s \cdot f_{yd}} - 1}$$

# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE



# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

---

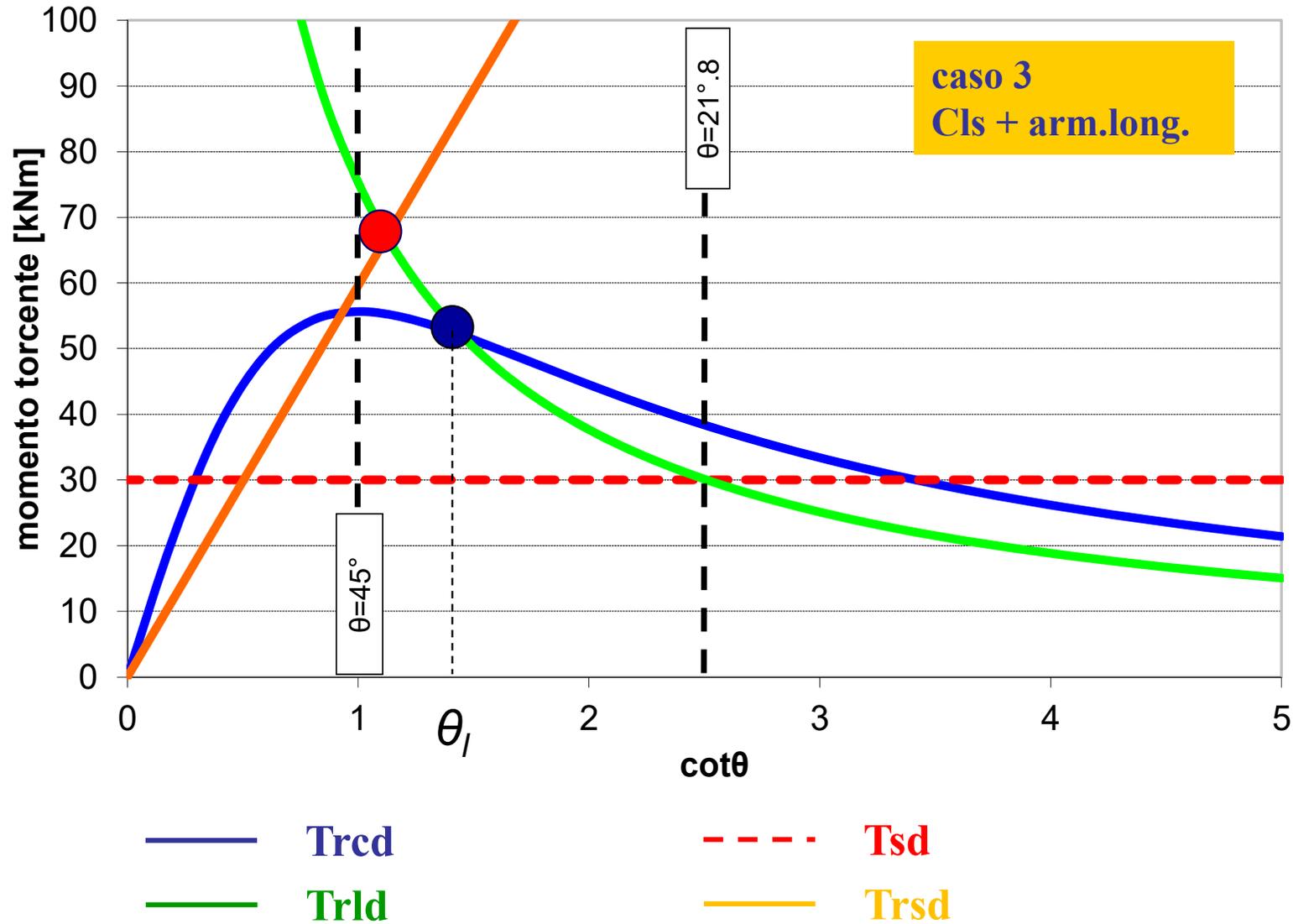
Se  $T_{Rcd}$  calcolato in corrispondenza del valore  $\cot\theta$  è minore di  $T_{Rld}$  allora la crisi avviene per:

## **CASO 3: ROTTURA DELLE BIELLE DI CLS E SNERVAMENTO DELLE BARRE LONGITUDINALI**

Il valore  $\cot\theta_1$  è determinato imponendo l'uguaglianza tra  $T_{Rld}$  e  $T_{Rcd}$

$$T_{Rcd} = T_{Rld} \Rightarrow \cot\theta_1 = \sqrt{\frac{\frac{\sum A_1 \cdot f_{yd}}{u_m}}{t \cdot f'_{cd} - \frac{\sum A_1 \cdot f_{yd}}{u_m}}}$$

# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE



# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

Bisogna, quindi, determinare il valore della  $\cot\theta$  per i casi di rottura 2 e 3 ( $\cot\theta_s$ ;  $\cot\theta_l$ ).

$$T_{Rcd} = T_{Rsd} \Rightarrow \cot\theta_s = \sqrt{\frac{t \cdot f'_{cd} \cdot s}{A_s \cdot f_{yd}} - 1}$$

**Caso 2**

$$T_{Rcd} = T_{Rld} \Rightarrow \cot\theta_l = \sqrt{\frac{\frac{\sum A_l \cdot f_{yd}}{u_m}}{t \cdot f'_{cd} - \frac{\sum A_l \cdot f_{yd}}{u_m}}}$$

**Caso 3**

La torsione resistente  $T_{Rd}$  è data dal valore più grande assunto in corrispondenza dei due valori di  $\cot\theta$  secondo la seguente espressione:

$$T_{Rd} = \max\{T_{Rcd}(\cot\theta_s); T_{Rcd}(\cot\theta_l)\}$$

# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

---

In considerazione del limite di norma sul valore di  $\cot\theta$  si possono avere dei *sotto-casi* di verifica.

Se risulta  $\cot\theta = (a_1 / a_s)^{1/2} > 2.5$  allora nella sezione si attinge la crisi simultanea delle bielle di cls e delle armature trasversali (CASO 2.1)

Il valore di  $\cot\theta$  è determinato ponendo:

$$T_{Rcd} = T_{Rsd} \Rightarrow \cot\theta_s = \sqrt{\frac{t \cdot f'_{cd} \cdot s}{A_s \cdot f_{yd}} - 1}$$

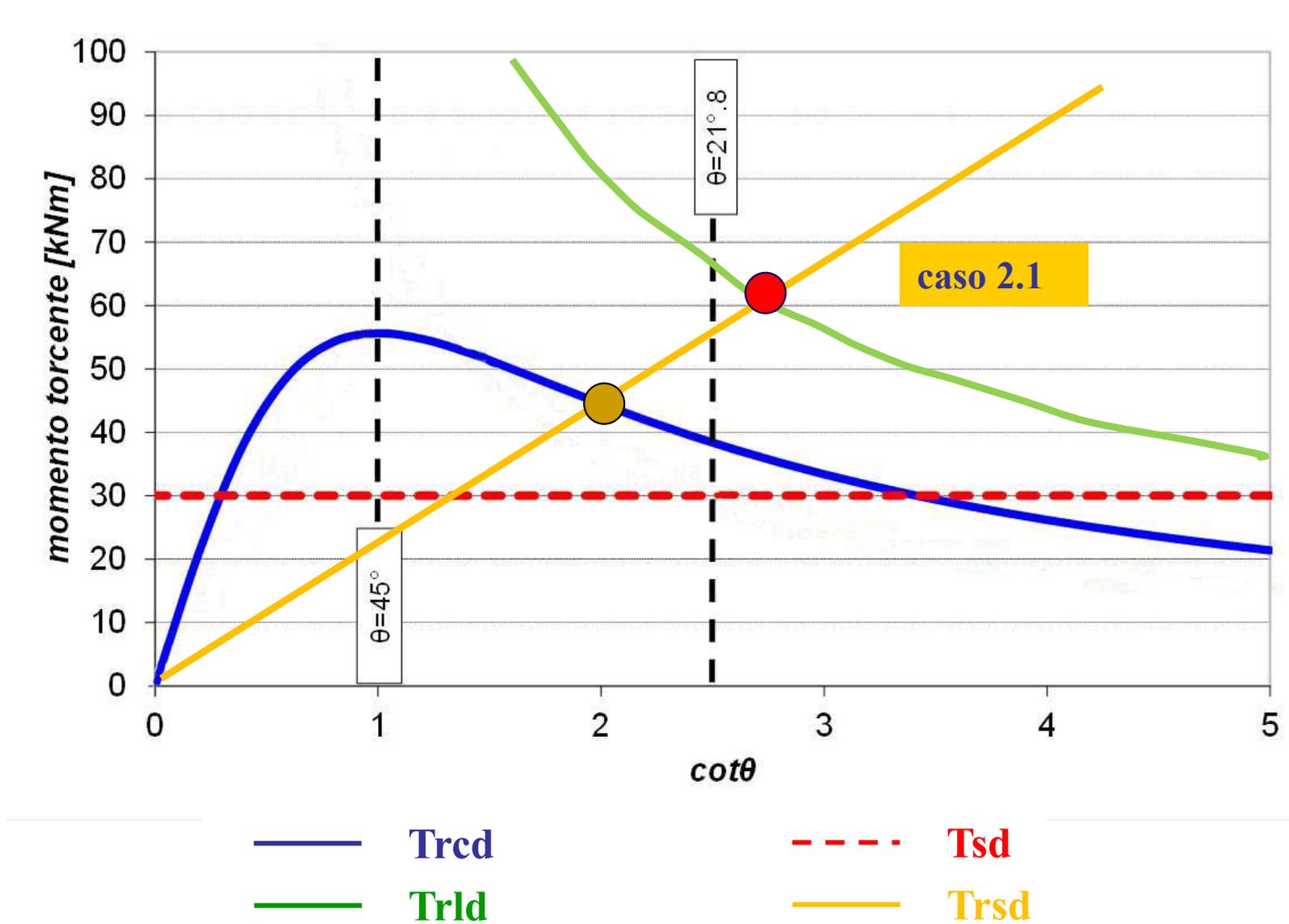
Il valore del momento torcente resistente è dato da:

$$T_{Rcd} = 2 \cdot A \cdot t \cdot f'_{cd} \cdot \cot\theta_s / (1 + \cot^2\theta_s)$$

ovvero da:

$$T_{Rsd} = 2 \cdot A \cdot \frac{A_s}{s} \cdot f_{yd} \cdot \cot\theta_s$$

# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

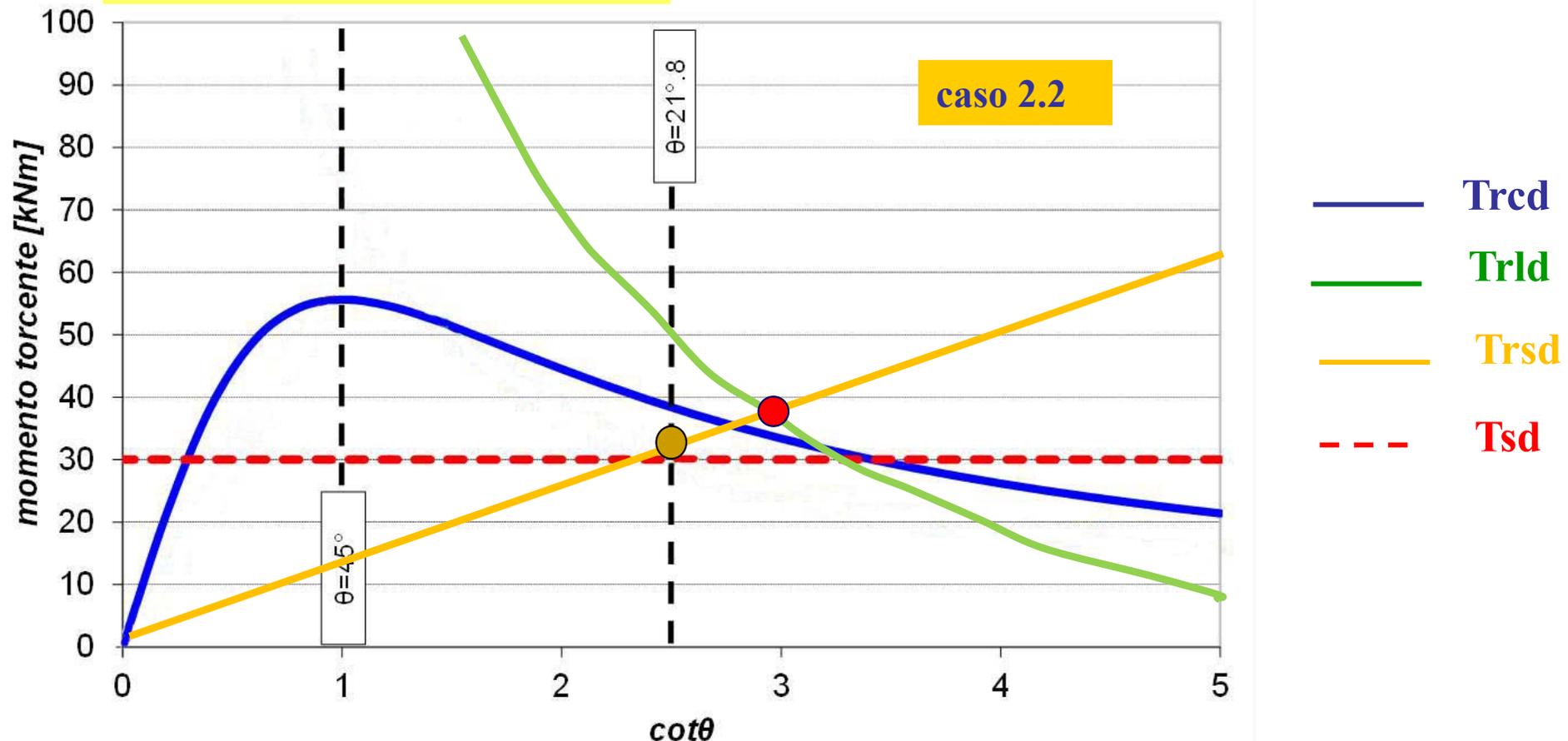


# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

Se risulta  $\cot\theta_s > 2.5$  allora siamo nel **CASO 2.2** e il momento torcente resistente è dato da:

$$T_{Rsd} = 2 \cdot A \cdot \frac{A_s}{s} \cdot f_{yd} \cdot \cot\theta_s$$

dove  $\cot\theta_s = 2.5$



# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

---

Se risulta  $\cot\theta = (a_l/a_s)^{1/2} < 1$  allora nella sezione si attinge la crisi simultanea delle bielle di cls e delle armature longitudinali **(CASO 3.1)**

Il valore di  $\cot\theta$  è determinato ponendo:

$$T_{Rcd} = T_{Rld} \Rightarrow \cot\theta_1 = \sqrt{\frac{\frac{\sum A_1 \cdot f_{yd}}{u_m}}{t \cdot f'_{cd} - \frac{\sum A_1 \cdot f_{yd}}{u_m}}}$$

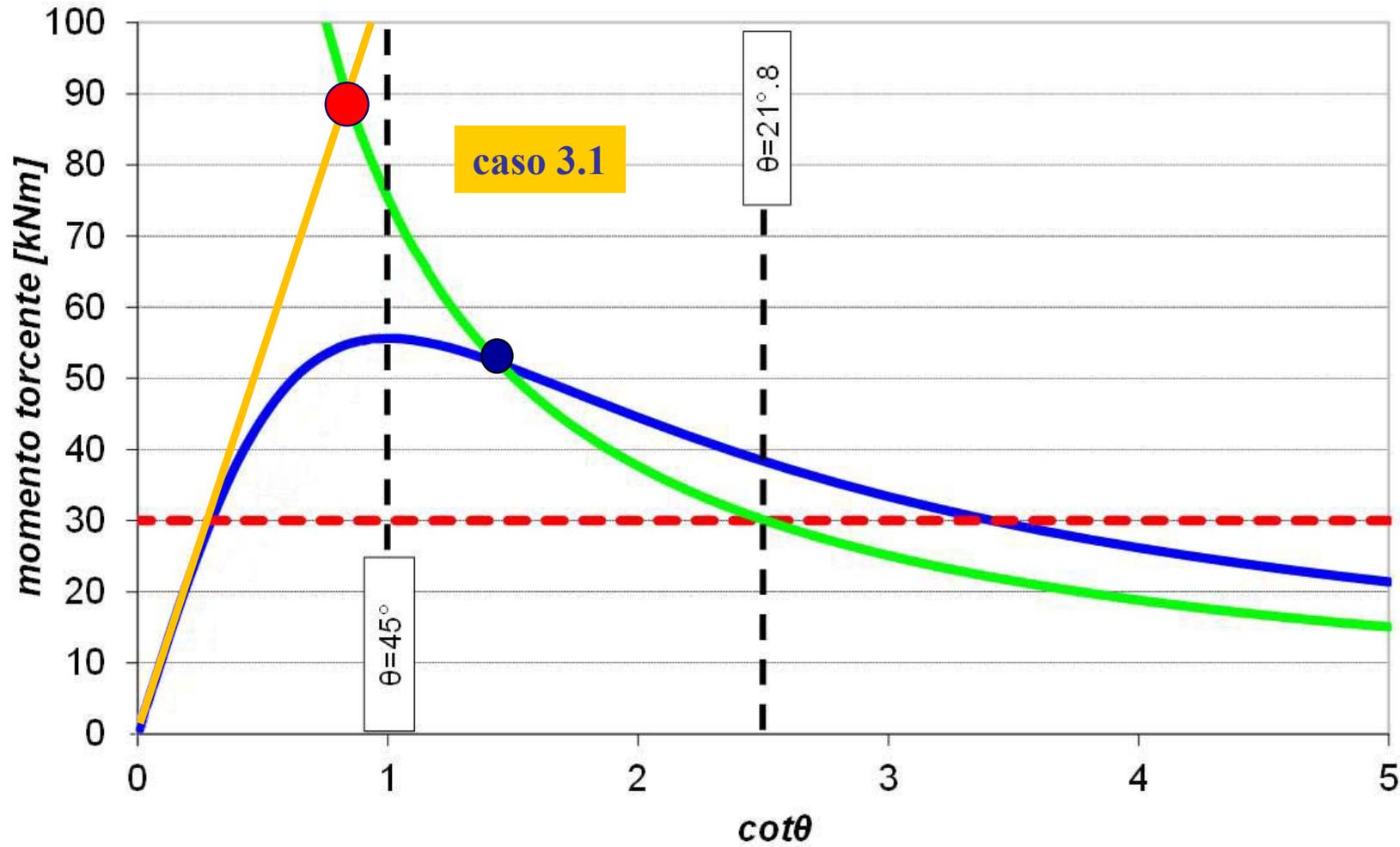
Il valore del momento torcente resistente è dato da:

$$T_{Rcd} = 2 \cdot A \cdot t \cdot f'_{cd} \cdot \cot\theta_1 / (1 + \cot^2 \theta_1)$$

ovvero da:

$$T_{Rld} = 2 \cdot A \cdot \frac{\sum A_1}{u_m} \cdot f_{yd} \cdot \frac{1}{\cot\theta_1}$$

# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE



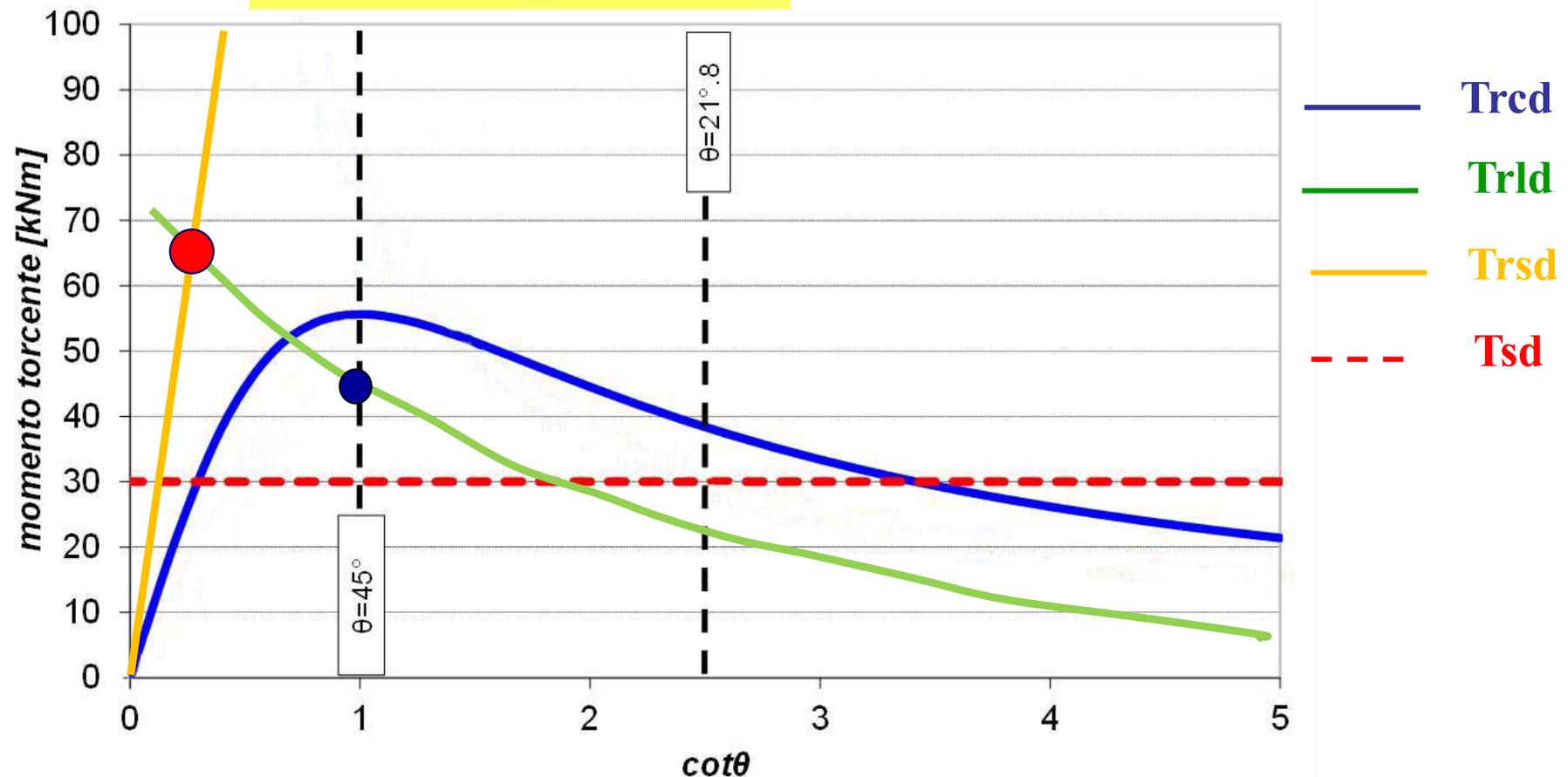
—  $T_{rcd}$       —  $T_{sd}$   
—  $T_{rsd}$       —  $T_{rld}$

# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE

Se risulta  $\cot\theta_1 < 1$  allora siamo nel CASO 3.2 e il momento torcente resistente è dato da:

$$T_{Rld} = 2 \cdot A \cdot \frac{\sum A_1}{u_m} \cdot f_{yd} \cdot \frac{1}{\cot\theta_1}$$

dove  $\cot\theta_1 = 1$



# Metodo di Progetto/verifica grafico delle armature

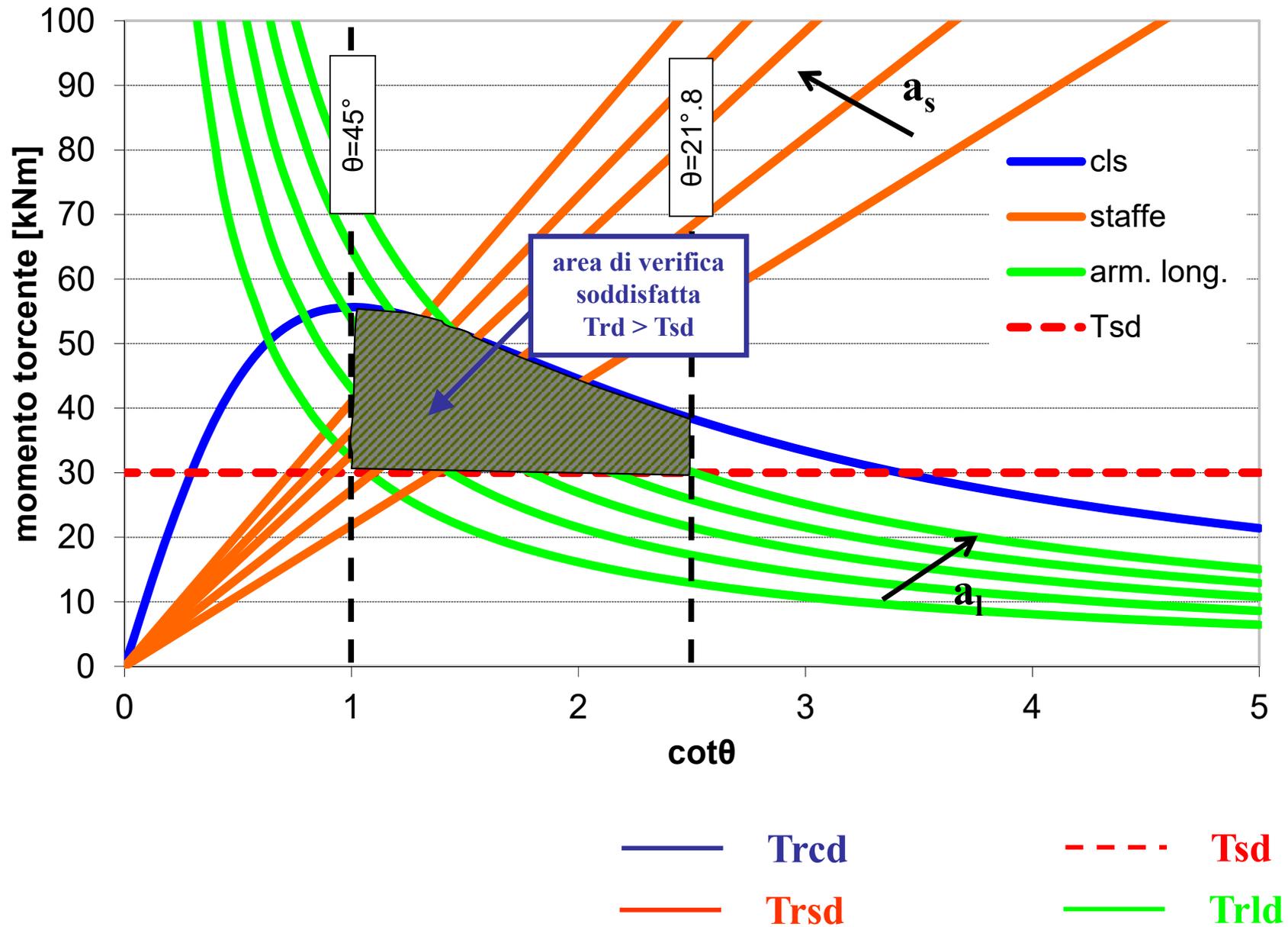
---

Per il progetto/verifica dell'armatura resistente a torsione può essere realizzato un diagramma riportante la funzione della **torsione resistente del cls** ( $T_{Rcd}$ ) e le funzioni della **torsione resistente delle barre longitudinali** ( $T_{Rld}$ ) e **trasversali** ( $T_{Rsd}$ ) per diversi valori del rapporto di armatura ( $a_s$ ;  $a_l$ ) al variare del valore di  $\cot\theta$ .

Le soluzioni possibili sono tutti i punti di intersezione tra le funzioni  $T_{Rld}$  e  $T_{Rsd}$  che ricadono entro i valori  $\cot\theta = 1.0$  e  $\cot\theta = 2.5$  e delimitati dai punti della funzione  $T_{Rcd}$  e del valore della torsione agente  $T_{Sd}$

**ATTENZIONE:** Se il valore della torsione agente  $T_{Sd}$  risulta essere maggiore del valore massimo della torsione resistente del cls  $T_{Rcd}$  (valutato per  $\cot\theta = 1$ ) bisogna necessariamente definire una nuova geometria della sezione di cls ovvero utilizzare un cls di resistenza maggiore

# VERIFICA SLU PER SOLLECITAZIONI DI TORSIONE



# S.L.U. SOLLECITAZIONI COMPOSTE (NTC2018)

---

## TORSIONE, FLESSIONE E SFORZO NORMALE

Le armature longitudinali calcolate con le regole richieste per garantire la resistenza richiesta nei riguardi della sollecitazione torcente devono essere aggiunte a quelle calcolate nei riguardi delle verifiche per flessione.

Si applicano inoltre le seguenti regole:

- nella zona tesa all'armatura longitudinale richiesta dalla sollecitazione di flessione e sforzo normale, deve essere aggiunta l'armatura richiesta dalla torsione;
- nella zona compressa, se la tensione di trazione dovuta alla torsione è minore della tensione di compressione nel calcestruzzo dovuta alla flessione e allo sforzo normale, non è necessaria armatura longitudinale aggiuntiva per torsione.

# S.L.U. SOLLECITAZIONI COMPOSTE (NTC2018)

---

## TORSIONE E TAGLIO

Per quanto riguarda la crisi lato calcestruzzo, la resistenza massima di una membratura soggetta a torsione e taglio è limitata dalla resistenza delle bielle compresse di calcestruzzo. La verifica è soddisfatta se risulta:

$$\frac{T_{Ed}}{T_{Rcd}} + \frac{V_{Ed}}{V_{Rcd}} \leq 1$$

### ATTENZIONE:

Per l'angolo  $\theta$  delle bielle compresse di conglomerato cementizio deve essere assunto un unico valore per le due verifiche di taglio e torsione.